Übung 1. Density matrix and the Bloch sphere

Lernziel: We learn how to represent pure and mixed states using Bloch sphere representation

(a) Prove that

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \tag{1}$$

where $|\boldsymbol{n}| \leq 1$ and $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ is a vector of Pauli matrices, satisfies the definition of a density matrix. We can see these states as lying on or inside the Bloch sphere, with vector $\boldsymbol{n}$ being their position vector in spherical coordinates.

(b) For which vectors $\boldsymbol{n}$ does ρ represent pure states? Where are these states on the Bloch sphere?

(c) For which vectors $\boldsymbol{n}$ does ρ represent mixed states? Where is the maximally mixed state in the Bloch sphere representation?

Lösung Use $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Then

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(1 + \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{1+n_z}{2} & \frac{n_x - in_y}{2} \\ \frac{n_x + in_y}{2} & \frac{1-n_z}{2} \end{pmatrix}$$

(a) One needs to show that

1. $\mathrm{tr}(\rho) = 1$ From the properties of the trace and using $\mathrm{tr}(\sigma_i) = 0$, we have:

$$\mathrm{tr}(\rho) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(1) + \sum_i n_i \,\mathrm{tr}(\sigma_i)) = \frac{1}{2}(2 + 0) = 1$$

2. ρ is Hermitian
Follows from the fact that identity and Pauli matrices are Hermitian.

3. ρ is positiv.
We have 2 eigenvalues whose sum is 1. ρ being positive is equivalent to it having non-negative eigenvalues, hence we need their product to be positive, i.e. $det(\rho) \geq 0$. As sum is 1, we cannot have two negative eigenvalues, hence condition $det(\rho) \geq 0$ is also enough to show that ρ is positive. From the matrix form for ρ we have that

$$det(\rho) = \frac{1 - n_z^2}{4} - \frac{n_x^2 + n_y^2}{4} = \frac{1}{4}(1 - |\boldsymbol{n}|^2) \geq 0$$

and equals zero when $|\boldsymbol{n}| = 1$.

(b) For $|\boldsymbol{n}| = 1$. This we can see from previous example, as determinant is zero if and only if one of the eigenvalues is zero, and in that case the other has to be one, which defines a pure state. These states lie on the surface of the sphere.

(c) For $|\boldsymbol{n}| < 1$. In this case none of the eigenvalues equals 0. These states lie inside the sphere. Maximally mixed state $\rho = \frac{1}{2}1$ is in the centre.

Übung 2. Dichtematrix und Wahrscheinlichkeiten

Lernziel: Wir lernen den Umgang mit Dichtematrizen durch ein paar Beispiele besser kennen.

Finde die Dichtematrix folgender Zwei-Niveau Systeme in der Basis $|0\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $|1\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$:

(a) *Ein System präpariert im Zustand* $|1\rangle$;

(b) *Ein System präpariert im Superposition Zustand* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i\,|1\rangle)$;

(c) *Ein System, zufällig präpariert im Zustand* $|0\rangle$ *oder* $|1\rangle$ *mit Wahrscheinlichkeit* $1/2$;

(d) *Ein System, zufällig präpariert im Zustand* $|+\rangle$ *oder* $|-\rangle$ *mit Wahrscheinlichkeit* $1/2$, *wobei* $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$;

Jetzt haben wir ein System im Zustand $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$; *Was ist die Dichtematrix* ρ? *Finde die Dichtematrix folgender Zwei-Niveau Systeme:*

(e) *Das System* ρ *nach einer Messung in der Basis* $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, *die das Resultat* $|0\rangle$ *ergeben hat;*

(f) *Das System* ρ, *nachdem jemand anders einer Messung in der Basis* $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ *durchgeführt hat, aber dir das Messresultat nicht mitgeteilt hat.*

Finde diese Zustand an die Bloch sphere.

Lösung

(a) $\rho = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $|\psi\rangle$ is a pure state. The density operator is the following:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|0\rangle - i\,|1\rangle)(\langle 0| + i\,\langle 1|) \tag{L.1}$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + i\,|0\rangle\langle 1| - i\,|1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \tag{L.2}$$

(c) $\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(d) We write ρ in the $|0\rangle, |1\rangle$ basis:

$$\rho = \frac{1}{2}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle -| = \frac{1}{4}(|0\rangle + |1\rangle)(\langle 0| + \langle 1|) + \frac{1}{4}(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|) \tag{L.3}$$

$$= \frac{1}{4}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \tag{L.4}$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{L.5}$$

Note that the density matrix is identical to the density matrix from the previous item.

Similar to the calculation in (b), now we get $\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

(e) After observing the state $|0\rangle$ in the measurement, the post measurement state is given by the pure state $|0\rangle$ ($|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$ collapsed to $|0\rangle$). The density matrix is therefore $\rho = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(f) When measuring $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$ in the basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ we can get the state $|0\rangle$ with probability $\frac{3}{4}$ and the state $|1\rangle$ with probability $\frac{1}{4}$. If we do not know which of the results accrued then the post measurement state is the mixed state $\rho = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Notice how the measurement procedure *decoheres* the state (i.e., its off-diagonal entries vanish compared to (v)). This happens for example in the Young slits experiment if one measures in which one of the two slits the particle has passed.

To find this state on the Bloch sphere, we can use Ex. 1 and find the vector $\boldsymbol{n}$. We have that

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1+n_z}{2} & \frac{n_x - i n_y}{2} \\ \frac{n_x + i n_y}{2} & \frac{1-n_z}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Solving this for $\boldsymbol{n}$, we have $n_x = n_y = 0$ and $n_z = \frac{1}{2}$, hence $\boldsymbol{n} = (0, 0, \frac{1}{2})$, and the state lies on the z-axis inside the Bloch sphere (as it is mixed).

Übung 3. Drehimpulsaddition

Lernziel: Diese Aufgabe repetiert die Drehimpulsaddition welche im Skript in Kapitel 11.3 behandelt wird.

Betrachte ein Atom mit Kernspin $I = 4$ sowie ein Elektron im d-Orbital (d.h. $l = 2$) (ignoriere alle anderen Elektronen, die sich in gefüllten Orbitalen befinden). Bestimme die möglichen Werte des Gesamtdrehimpulses und die zugehörigen Multiplizitäten.

Lösung Das Elektron befindet sich in einem Orbital mit Drehimpulsmoment d ($l = 2$), und hat selber einen Spin $S = \frac{1}{2}$. Wir addieren also

$$(\mathcal{H}_4 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = (\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4 \oplus \mathcal{H}_5 \oplus \mathcal{H}_6) \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \tag{L.6}$$

$$= \mathcal{H}_{\frac{3}{2}} \oplus 2\mathcal{H}_{\frac{5}{2}} \oplus 2\mathcal{H}_{\frac{7}{2}} \oplus 2\mathcal{H}_{\frac{9}{2}} \oplus 2\mathcal{H}_{\frac{11}{2}} \oplus \mathcal{H}_{\frac{13}{2}} \quad . \tag{L.7}$$

Übung 4. Quantenteleportation

Lernziel: Entanglement (Verschränkung) ist eine einzigartige Eigenschaft der Quantenmechanik, welche einerseits fundamental interessant ist, aber auch viele Anwendungen findet. In dieser Aufgabe sehen wir, wie Entanglement zwischen zwei Teilchen für ein Quantenteleportationsprotokoll benutzt werden kann.

Alice besitzt ein Spin-1/2 Teilchen in einem unbekannten Zustand $|\phi_1\rangle$. Sie möchte Bob diesen Zustand senden, darf aber nur klassisch mit Bob kommunizieren, d.h. sie darf Bob nur klassische Bits mitteilen. Wir nehmen nun an, dass Alice und Bob je ein Spin-1/2 Teilchen eines EPR-Paars besitzen, das sie bei einem früheren Treffen ausgetauscht haben.

In dieser Übung wird gezeigt, dass Alice diese "Quantenteleportation" ausführen kann. Historisch wurde dieses Protokoll 1993 von Charles Bennett et al. entdeckt[1]*. Diese Übung folgt der Notation dieses Originalpapers.*

Der Zustand des EPR-Paars lässt sich in folgender Form schreiben:

$$|\Psi_{23}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow_2}\rangle\,|{\downarrow_3}\rangle - |{\downarrow_2}\rangle\,|{\uparrow_3}\rangle\right) \;, \tag{2}$$

wobei "2" und "3" die jeweiligen Teilchen von Alice und Bob indizieren. Der unbekannte Zustand von Alice lässt sich als Linearkombination der Basis $|{\uparrow_1}\rangle$, $|{\downarrow_1}\rangle$ schreiben:

$$|\phi_1\rangle = a\,|{\uparrow_1}\rangle + b\,|{\downarrow_1}\rangle \;, \tag{3}$$

wobei $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Alice misst die Teilchen "1" und "2" (die in ihrem Besitz sind) in der sog. Bellbasis:

$$|\Psi_{12}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow_1}\rangle\,|{\downarrow_2}\rangle \pm |{\downarrow_1}\rangle\,|{\uparrow_2}\rangle\right) \;, \quad |\Phi_{12}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow_1}\rangle\,|{\uparrow_2}\rangle \pm |{\downarrow_1}\rangle\,|{\downarrow_2}\rangle\right) \;. \tag{4}$$

(a) *Schreibe den Zustand $|\psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\Psi_{23}^-\rangle$ des zusammengesetzten Systems in der Bellbasis (4) für die Teilchen "1" und "2" aus. Was sind die Wahrscheinlichkeiten der vier verschiedenen Messresultate? Was ist, für jedes Messresultat, der Zustand nach der Messung? Insbesondere, was ist der Zustand von Bobs Teilchen?*

(b) *Alice teilt Bob mit, welches Messresultat sie bekommen hat (diese Information wird mit Hilfe von zwei klassischen Bits beschrieben, die sie Bob senden darf). Was kann Bob tun, um den ursprünglichen, Alice unbekannten Zustand $|\phi_1\rangle$ zu rekonstruieren?*

(c) *There is no reason why the state ϕ_1 cannot be entangled with some other system that Alice and Bob do not control. Think of the case when the particle to teleport on Alice's side is entangled to Charlie's qubit. What will happened with entanglement after the teleportation protocol? Consider a purification of ρ_1 on a reference system R,*

$$\rho_1 = \mathrm{tr}_R\,|\phi\rangle_{1R} \,. \tag{5}$$

Show that if you apply the quantum teleportation protocol as before, not touching the reference system, the final state on $H_B \otimes H_R$ will be the same as state $|\phi\rangle_{1R}$.
This implies that quantum teleportation preserves entanglement — it simply transfers it from 1 and R to B and R.
Hint: Use a Schmidt decomposition of a joint state $|\phi\rangle_{RS} = \sum_i c_i\,|r_i\rangle_R \otimes |s_i\rangle_S$

Lösung

(a) Der Zustand $|\psi_{123}\rangle$ lässt sich in folgender Form schreiben:

$$|\psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\Psi_{23}^-\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow_1\uparrow_2\downarrow_3}\rangle - |{\uparrow_1\downarrow_2\uparrow_3}\rangle\right) + \frac{b}{\sqrt{2}}\left(|{\downarrow_1\uparrow_2\downarrow_3}\rangle - |{\downarrow_1\downarrow_2\uparrow_3}\rangle\right) \tag{L.8}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\,|\Psi_{12}^-\rangle\left(-a\,|{\uparrow_3}\rangle - b\,|{\downarrow_3}\rangle\right) + |\Psi_{12}^+\rangle\left(-a\,|{\uparrow_3}\rangle + b\,|{\downarrow_3}\rangle\right) + \tag{L.9}$$

$$|\Phi_{12}^-\rangle\left(a\,|{\downarrow_3}\rangle + b\,|{\uparrow_3}\rangle\right) + |\Phi_{12}^+\rangle\left(a\,|{\downarrow_3}\rangle - b\,|{\uparrow_3}\rangle\right)\Big] \,. \tag{L.10}$$

Aus (L.10) kann man lesen, dass die Messresultate $|\Psi_{12}^\pm\rangle$ und $|\Phi_{12}^\pm\rangle$ je mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ vorkommen. Nach Alices Messung wird der Zustand $|\psi_{123}\rangle$ auf einen von den

[1] Phys. Rev. Lett. **70** 1895 (1993)

vier Termen in (L.10) projeziert. Insbesondere wird Bobs Teilchen je nach Messresultat auf einen der folgenden Zustände projeziert:

$$- |\phi_3\rangle \ , \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle \tag{L.11}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle \ , \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle \ , \tag{L.12}$$

wobei $|\phi_3\rangle = a\, |\uparrow_3\rangle + b\, |\downarrow_3\rangle$.

(b) Wenn Bob weiss, auf welchen Zustand sein Teilchen projeziert worden ist, braucht er nur die relevante unitäre Operation anzuwenden, um den Zustand $|\phi_3\rangle$ zu rekonstruieren:

$$- \mathbb{I}\left[- |\phi_3\rangle\right] = |\phi_3\rangle \ , \qquad - \sigma_z \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle\right] = |\phi_3\rangle \tag{L.13}$$

$$\sigma_x \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle\right] = |\phi_3\rangle \ , \qquad i\sigma_y \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle\right] = |\phi_3\rangle \ , \tag{L.14}$$

(c) We will write $\phi_1 = \phi_S$.

A Schimdt decomposition of the pure joint state of S and R gives us $|\phi\rangle_{RS} = \sum_i c_i\, |r_i\rangle_R \otimes |s_i\rangle_S$. The initial global state of R,S,A and B is:

$$|\Omega_\phi^0\rangle_{RSAB} = |\phi\rangle_{RS} \otimes |ab^1\rangle_{AB} \tag{L.15}$$

$$= (\sum_i c_i\, |r_i\rangle_R \otimes |s_i\rangle_S) \otimes |ab^1\rangle_{AB} \tag{L.16}$$

$$= \sum_i c_i (|r_i\rangle_R \otimes |s_i\rangle_S \otimes |ab^1\rangle_{AB}) \tag{L.17}$$

The protocol does not affect R. The final global state is

$$|\Omega_\phi^k\rangle_{RSAB} = \sum_i c_i (|r_i\rangle_R \otimes |sa\rangle_{SA}^k \otimes |s_i\rangle_B) \tag{L.18}$$

where k denotes one of the 4 possible results of the Alice's measurement.

The reduced state of R and B is:

$$\mathrm{tr}_{SA}\, |\Omega_\phi^k\rangle_{RSAB} = \sum_i c_i\, |r_i\rangle_R \otimes |s_i\rangle_B = |\phi\rangle_{RB} \tag{L.19}$$

Hence, a system R is now entangled with a teleported state in B's position, and the entanglement was preserved during teleportation.

Übung 5. Das No-Cloning Theorem

Lernziel: Das No-Cloning Theorem ist ein weiteres Beispiel worin sich die klassische Welt von der quantenmechanischen Welt unterscheidet. In dieser Aufgabe werden wir das Theorem erklären und beweisen. Dieses Theorem ist enorm wichtig (z.B. für die Quantenkryptographie) und ist erstaunlicherweise recht einfach zu beweisen.

Ist es möglich eine Kopie von einem unbekannten *quantenmechanischen Zustand zu machen? Erstaunlicherweise ist dies nicht möglich! Dies werden wir nun sauber beweisen (über einen Widerspruchsbweis). Dafür formalisieren wir zuerst die Aussage ein wenig:*

Wir nehmen an es existiere eine Maschine (eine die Quatenzustände klonen kann) mit zwei Registern A und B. Das Register A (das Datenregister) started mit einem unbekannten reinen Zustand $|\psi\rangle$. Dieser Zustand möchten wir nun in das Register B (das Zielregister) kopieren. Wir nehmen an dass das Register B in einem (beliebigen) Startzustand $|s\rangle$ startet. Der Anfgangszustand der Kopiermaschine ist also

$$|\psi\rangle_A \otimes |s\rangle_B \ . \tag{6}$$

Wir wissen das Evolutionen durch Unitäre beschrieben werden. Das heisst wir müssen zeigen dass keine Unitäre U existieren kann so dass

$$|\psi\rangle_A \otimes |s\rangle_B \xrightarrow{U} U(|\psi\rangle_A \otimes |s\rangle_B) = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \ . \tag{7}$$

Lösung Wir nehmen an dass der in der Aufgabenstellung erklärte Kopiervorgang für zwei beliebige reine Zusände $|\psi\rangle$ und $|\varphi\rangle$ funktioniert, d.h.

$$U(|\psi\rangle_A \otimes |s\rangle_B) = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \quad \text{und} \quad U(|\varphi\rangle_A \otimes |s\rangle_B) = |\varphi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B \ . \tag{L.20}$$

Wenn wir nun das Skalarprodukt zwischen den beiden Gleichungen bilden kriegen wir

$$\langle\psi|\,|\varphi\rangle = (\langle\psi|\,|\varphi\rangle)^2 \ . \tag{L.21}$$

Da die Gleichung $x = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ nur zwei Lösungen $x = 0$ und $x = 1$ hat folgt dass entweder $|\psi\rangle = |\varphi\rangle$ oder $|\psi\rangle$ und $|\varphi\rangle$ orthogonal sind. Das heisst das die Kopiermaschine nur Zustände klonen kann welche orthogonal zueinander sind. Daher ist es nicht möglich allgeine Zustände zu kopieren.

Beispiel: Es kann keine Maschine existieren die die beiden Zusände $|\psi\rangle = |0\rangle$ und $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ kopieren kann (da die beiden Zusände offensichtlich nicht orthogonal zueinander sind).

Es gibt noch weiter offene Fragen zum No-Cloning Theorem welche aber alle sauber behandelt wurden (siehe z.B. "Quantum Computation and Quantum Information"by Michael Nielsen and Isaac Chuang, Cambridge University Press) wie zum Beispiel

- Unser Beweis oben funktioniert für reine Zustände. Gilt das Theorem auch für allgemeine (nicht zwingend reine) Zusände? (Antwort ist "ja– kannst Du herausfinden wieso?).
- Gilt das No-Cloning Theorem immer noch wenn wir annehmen das eine Evolution nicht zwingendermassen unitär sein muss?
- usw.