

Übung 1. Harmonischer Oszillator in drei Dimensionen

Lernziel: Wir haben den harmonischen Oszillator schon einige Male angetroffen. In dieser Übung behandeln wir ihn in drei Dimensionen und diskutieren die Entartungen der Energieeigenwerte im Falle eines isotropen Potentials.

Betrachte den anisotropen harmonischen Oszillator gegeben durch das Potential

$$V(x) = \frac{m}{2} (\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2) . \quad (1)$$

- (a) Bestimme die Energieeigenwerte durch Lösen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung.
 (b) Zeige, dass für Energien $E \gg \hbar\omega_i$ die Zustandsdichte approximiert werden kann durch

$$g(E) \approx \frac{E^2}{2 \hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} . \quad (2)$$

Hinweis: Berechne erst die Zahl der Zustände mit Energie $< E$ und leite dann nach E ab.

- (c) Bestimme die Entartung der Energieeigenwerte im Falle eines isotropen Potentials, d.h., wenn $\omega_i = \omega$.
 (d) Eine Entartung der Energieeigenwerte rührt häufig von einer Symmetrie her. Das isotrope Potential ist offensichtlich rotationssymmetrisch. In welche irreduzible Darstellungen der Drehgruppe $SO(3)$ zerfällt ein Energieeigenraum zum Eigenwert E ?

Hinweis: Verwende, dass die Raumspiegelung eine Symmetrie des Potentials ist. Welchen Drehimpulsen entsprechen Zustände gerader (ungerader) Parität?

Lösung

- (a) Das Problem lässt sich auf den eindimensionalen Oszillator reduzieren und wir erhalten

$$E = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_1 + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_2 + \left(u_3 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_3 . \quad (L.1)$$

- (b) Für $E \gg \hbar\omega_i$ und $i = 1, 2, 3$ können wir den Grundzustand vergessen und die u_i durch kontinuierliche Variablen approximieren. Die Gesamtzahl der Zustände mit Energie $\leq E$ ist dann gegeben durch

$$G(E) \approx \frac{1}{\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \int_0^E d\varepsilon_1 \int_0^{E-\varepsilon_1} d\varepsilon_2 \int_0^{E-\varepsilon_1-\varepsilon_2} d\varepsilon_3 = \frac{E^3}{6\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} , \quad (L.2)$$

für $\varepsilon_i := \hbar\omega_i u_i$.

Die Zustandsdichte ergibt sich durch Ableitung nach E

$$g(E) = \frac{d}{dE} G(E) = \frac{E^2}{2\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} . \quad (L.3)$$

- (c) Falls $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ ist

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \quad (L.4)$$

Die Entartung von E_n ist gegeben durch die Zahl der Partitionen $n = n_1 + n_2 + n_3$ mit $n_i \in \mathbb{N}$. Also kriegen wir

$$\sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n-n_1} 1 = \sum_{n_1=0}^n (n-n_1+1) = (n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = (n+1)(n+1-\frac{1}{2}n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \quad (\text{L.5})$$

- (d) Die Parität ist eine Erhaltungsgrösse. Vom 1-dim. Oszillator wissen wir, dass Zustände gerader (ungerader) Hauptquantenzahl n gerader (ungerader) Parität sind. Aus der Theorie der Kugelfunktionen wissen wir ebenfalls dass Zustände mit geradem (ungeradem) Drehimpuls ℓ gerade (ungerade) Parität haben.

Folglich tauchen in der Zerlegung der Energieeigenräume \mathcal{E}_n nur die Darstellungen

$$\mathcal{D}_n, \mathcal{D}_{n-2}, \dots, \mathcal{D}_0 \quad (\text{L.6})$$

auf. Ein Dimensionsvergleich zeigt dass

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{D}_n \oplus \mathcal{D}_{n-2} \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_0. \quad (\text{L.7})$$

Übung 2. Streuung an der harten Kugel

Lernziel: Die Konzepte der (drehimpulsabhängigen) Streuphasen δ_l und Streuquerschnitte σ_l wurden in der Vorlesung eingeführt. Mache dich anhand der folgenden Aufgaben mit diesen neuen Grössen vertraut.

Wir betrachten ein hartes Streuzentrum gegeben durch das Potential

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq r_0 \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \quad (3)$$

- (a) Berechne die Streuphasen δ_0 und δ_1 . Skizziere die radiale Wellenfunktion für $l = 0$ in Abhängigkeit von $\rho_0 = kr_0$.
- (b) Berechne den totalen Streuquerschnitt σ im Limes kleiner Einfallenergien ($\rho_0 \ll 1$) bis zur Ordnung $O(\rho_0^4)$. Warum kann man die Partialwellen mit grossen l vernachlässigen? Was erwartet man für den totalen Streuquerschnitt im klassischen Fall?

Lösung

- (a) Das Problem wird wie gewohnt in Winkel- und Radialteil zerlegt. Der Radialteil $R_l(r)$ kann für jede Drehimpulsquantenzahl l separat gelöst werden. Für $r > r_0$ kennen wir die Wellenfunktion bereits. Es gilt

$$R_l(r) = (1/2)[h_l^{(2)}(kr) + e^{2i\delta_l} h_l^{(1)}(kr)] \quad (\text{L.8})$$

$$= e^{i\delta_l} [\cos(\delta_l) j_l(kr) - \sin(\delta_l) n_l(kr)]. \quad (\text{L.9})$$

Für eine harte Kugel ist die Randbedingung gegeben durch $R_l(r_0) = 0$ und mit $\rho_0 = kr_0$

$$\tan(\delta_l) = \frac{j_l(\rho_0)}{n_l(\rho_0)} \quad (\text{L.10})$$

Für die Drehimpulse $l = 0, 1$ sind die Bessel- und Neumannfunktionen gegeben durch

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^2}, \quad (\text{L.11})$$

$$n_0(x) = -\frac{\cos(x)}{x}, \quad n_1(x) = -\frac{\cos(x) + x \sin(x)}{x^2}. \quad (\text{L.12})$$

Unter Benutzung der trigonometrischen Formel $\tan(a+b) = [\tan(a)+\tan(b)]/[1-\tan(a)\tan(b)]$ vereinfachen sich die Randbedingungen zu

$$\tan(\delta_0) = -\tan(\rho_0), \quad \tan(\delta_1) = -\frac{\tan(\rho_0) - \rho_0}{1 + \rho_0 \tan(\rho_0)} = -\tan(\rho_0 - \arctan(\rho_0)) \quad (\text{L.13})$$

Wir finden also (exakt) $\delta_0 = -\rho_0$ und (approximativ) $\delta_1 \approx -\rho_0^3/3$. Wir haben somit Radialwelle für $l = 0$ exakt bestimmt

$$R_0(\rho = kr) = e^{-i\rho_0} \frac{\sin(\rho - \rho_0)}{\rho} \quad (\text{L.14})$$

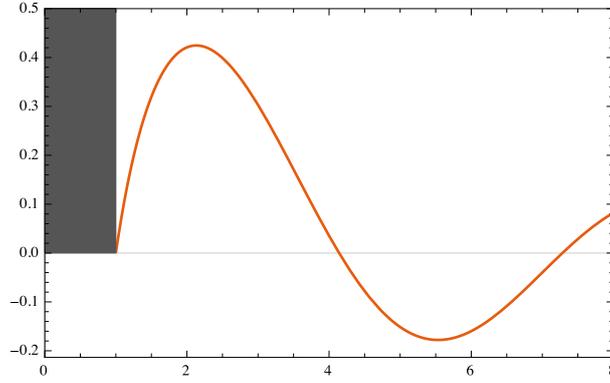


Abbildung 1: Radiale Wellenfunktion $R_{l=0}(\rho_0 x)$ als Funktion von x für eine harte Kugel. Die Nullstellen sind bei $x = 1 + n\pi$.

(b) Der totale Wirkungsquerschnitt [siehe Skript Gl. (6.54)] ergibt sich aus

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_l \frac{4\pi}{k^2} \frac{2l+1}{1 + \cot^2(\delta_l)} = \frac{4\pi r_0^2}{\rho_0^2} \sum_l (2l+1) \sin^2(\delta_l) \quad (\text{L.15})$$

also müssen wir $\sin(\delta_l)$ in Potenzen von ρ_0 entwickeln. Wir finden für kleine Energien gelten folgende Verhalten

$$j_l(\rho_0) = \frac{\rho_0^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(\rho_0) = \frac{(2l-1)!!}{\rho_0^{l+1}}, \quad \text{und somit} \quad \tan(\delta_l) \sim \rho_0^{2l+1} \quad (\text{L.16})$$

Bis zu vierter Ordnung in ρ_0 finden wir dann

$$\sigma_{\text{tot}} = 4\pi r_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{3} + \frac{17}{45} \rho_0^4\right) \longrightarrow 4\pi r_0^2 \quad (\text{L.17})$$

Klassisch streut die Kugel mit einem (viermal) kleineren Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{klass}} = \pi r_0^2$.

Übung 3. Das Teilchen im 3D-Topf

Lernziel: In dieser Übung repetieren wir das Teilchen im 3D-Topf welches im Skript in Kapitel 5.2 behandelt wurde.

Wir betrachten ein Potential $V(r) = V_0\Theta(r_0 - r) + V_1\Theta(r - r_0)$, d.h. innerhalb von einem Radius r_0 haben wir $V = V_0$ und ausserhalb $V = V_1$. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben berechnet sich die Energie des Grundzustands für $V_1 \rightarrow \infty$ als $E_\infty = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mr_0^2} + V_0$.

- (a) Wir nehmen an dass dies für alle Werte von V_1 gilt (also nicht nur im Limit $V_1 \rightarrow \infty$). Berechne die Bindungsenergie V_0 .
- (b) Berechne die Bindungsenergie V_0 exakt.
Hinweis: Folge dem Skript Kapitel 5.2.
- (c) Erkläre den Unterschied zwischen den Lösungen von Teilaufgabe (a) und (b).

Lösung

- (a) Für $E_\infty = 0$ kriegen wir $V_0 = -\frac{\hbar^2\pi^2}{2mr_0^2}$.
- (b) Dies ist sauber gemacht im Skript in Kapitel 5.2. Wenn wir dieser Herleitung folgen sehen wir dass wir

$$V_0 = -\frac{\hbar^2\pi^2}{8mr_0^2} \quad (\text{L.18})$$

kriegen.

- (c) Im Fall (a) wo wir den Limes $V_1 \rightarrow \infty$ betrachten entspricht das einer "harten Wand" (siehe Abbildung 2). Wir sehen daher dass

$$kr_0 = \pi \quad (\text{L.19})$$

gelten muss.

Im realistischen Fall (b) haben wir keine "harte Wand". Wie im Skript beschrieben ist können wir für den Grundzustand (d.h. $n=1$) sehen (siehe Abbildung 3) dass

$$kr_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{L.20})$$

(Für den ersten angeregten Zustand (d.h. $n=2$) kriegen wir $kr_0 = \frac{3\pi}{2}$.)

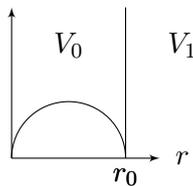


Abbildung 2: Grafische Erklärung für den Fall (a) ("harte Wand", i.e., $V_1 \rightarrow \infty$)

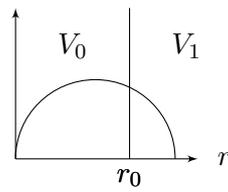


Abbildung 3: Grafische Erklärung für den Fall (b) i.e., $V_1 < \infty$