Übung 1. Wellenfunktionen im Impulsraum

Lernziel: In dieser Übung repetieren wir das Spielen mit der Dirac Notation, Basen und Darstellungen.

(a) *Beweise die folgenden Identitäten:*

$$i)\ \langle p'|\, x\, |\alpha\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p') \qquad ii)\ \langle\beta|\, x\, |\alpha\rangle = \int \frac{\partial}{\partial p}' \phi^*_\beta(p') i\hbar \frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p')\ ,$$

wobei $\phi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ *und* $\phi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ *Wellenfunktionen im Impulsraum sind.*

(b) *Wir betrachten ein symmetrisches Potential, d.h.,* $V(x) = V(-x)$ *und definieren den (Symmetrie) Operator* P*, den Paritätsoperator*

$$(P\Psi)(x) = \Psi(-x), \qquad \langle x|P|\Psi\rangle = \langle -x|\Psi\rangle\ . \tag{1}$$

Zeige dass der Hamiltonoperator $H = -\frac{\hbar}{2m}\partial_x^2 + V(x)$ *mit* P *kommutiert, d.h. zeige dass*

$$\langle x|HP|\Psi\rangle = \langle x|PH|\Psi\rangle\ . \tag{2}$$

Lösung

(a) i)

$$\langle p'|\, x\, |\alpha\rangle = \int \langle p'|\, x\, |p''\rangle \langle p''|\alpha\rangle\, dp'$$

$$\begin{aligned}\langle p'|\, x\, |p''\rangle &= \int \langle p'|\, x\, |x'\rangle \langle x'|p''\rangle\, dx' \\ &= \int x' \langle p'|x'\rangle \langle x'|p''\rangle\, dx'\end{aligned}$$

Ausserdem gilt

$$\langle p'|x'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i\frac{p'x'}{\hbar}}$$

und

$$\langle x'|p''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p''x'}{\hbar}}$$

$$\Rightarrow \langle p'|\, x\, |p''\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int x' e^{-i\frac{(p'-p'')x'}{\hbar}}\, dx'$$

Weiter wissen wir, dass

$$\delta(p-p') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{-i\frac{(p'-p'')x'}{\hbar}}\, dx'$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p-p') = -\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2\pi\hbar}\int x' e^{-i\frac{(p'-p'')x'}{\hbar}}\, dx'$$

$$\Rightarrow \langle p'|\, x\, |p''\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p-p').$$

Damit finden wir

$$
\begin{aligned}
\langle p'|\, x \,|\alpha\rangle &= \int \langle p'|\, x \,|p''\rangle \,\langle p''|\alpha\rangle \, dp' \\
&= i\hbar \int \frac{\partial}{\partial p'} \delta(p-p') \,\langle p''|\alpha\rangle \, dp' \\
&= i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \,\langle p'|\alpha\rangle \\
&= i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \phi_\alpha(p')
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
\langle \beta|\, x \,|\alpha\rangle &= \int \langle \beta|p'\rangle \,\langle p'|\, x \,|\alpha\rangle \, dp' \\
&= \int \langle \beta|p'\rangle \, i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \phi_\alpha(p') dp' \\
&= \int \overline{\langle p'|\beta\rangle} i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \phi_\alpha(p') dp' \\
&= \int \phi^*_\beta(p') i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \phi_\alpha(p') dp'
\end{aligned}
$$

wobei wir das Resultat von Teil i) benutzt haben.

(b) Wir benützen die Notation $|x\rangle \to |\xi\rangle$ für $\hat{X}\Psi_\xi(x) = \xi\Psi_\xi(x)$. Damit kriegen wir

$$
\langle\xi|HP|\Psi\rangle \int dx \Psi_\xi(x)\big(\partial_x^2 + V(x)\big)\Psi(-x) = \int dx\Psi_\xi(x)\big(\Psi''(-x) + V(x)\Psi(-x)\big) \;. \tag{L.1}
$$

Ebenfalls kriegen wir

$$
\begin{aligned}
\langle\xi|PH|\Psi\rangle &= \int dx\Psi_\xi(x)P\big(\partial_x^2 + V(x)\big)\Psi(x) && \text{(L.2)} \\
&= \int dx\Psi_\xi(x)P\big(\Psi''(x) + V(x)\Psi(x)\big) && \text{(L.3)} \\
&= \int dx\Psi_\xi(x)\big(\Psi''(-x) + V(-x)\Psi(-x)\big) && \text{(L.4)} \\
&= \int dx\Psi_\xi(x)\big(\Psi''(-x) + V(x)\Psi(-x)\big) && \text{(L.5)} \\
&= \int dx\Psi_\xi(x)\big(\Psi''(-x) + V(x)\Psi(-x)\big) \;. && \text{(L.6)}
\end{aligned}
$$

Übung 2. Kommutierende Observablen.

Lernziel: In dieser Übung verinnerlichen wir was genau erfüllt sein muss dass zwei Observablen kommutieren.

Zeige, dass im endlich-dimensionalen Fall zwei Observablen genau dann kommutieren, wenn sie gleichzeitig diagonalisierbar sind.

Hinweise: Die mathematische Aussage lautet: Für zwei selbstadjungierte Operatoren A, B gilt $[A, B] = 0$ genau dann, wenn eine Basis $\{|\phi_n\rangle\}$ existiert so dass alle $|\phi_n\rangle$ gleichzeitig Eigenvektoren von A und B sind.

Nehme zuerst an, dass $[A, B] = 0$.

(a) Zeige: Wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von der Observable A ist, dann ist $B|\psi\rangle$ auch ein Eigenvektor von A mit gleichem Eigenwert.

(b) Sei $\{|a_n^i\rangle\}$ eine Basis von Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\{a_n\}$ (der Index i entspricht Entartungen, d.h. wenn es mehrere Eigenvektoren zu einem gleichen Eigenwert gibt).

Stelle fest, dass B in dieser Basis Blockdiagonalform hat, wobei jeder Block auf einem Eigenraum von A wirkt.

(c) Bilde eine explizite Basis, deren Elemente gleichzeitig Eigenvektoren von A und B sind.

Für die Gegenrichtung, betrachte die Wirkung des Kommutators $[A, B]$ auf eine bestimmte Basis.

Lösung Wir nehmen zuerst an, dass $[A, B] = 0$ gilt, und zeigen die verschiedenen Punkte in den Hinweise.

(a) Nehme an, dass $A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$. Dann gilt

$$0 = [A, B]|\psi\rangle = AB|\psi\rangle - BA|\psi\rangle = A\,B|\psi\rangle - a\,B|\psi\rangle \ ,$$

d.h. $A\,B|\psi\rangle = a\,B|\psi\rangle$ und $B|\psi\rangle$ ist Eigenvektor von A mit gleichem Eigenwert a.

(b) Punkt (a) sagt uns, dass B die Eigenräume von A invariant lässt (denn ein Vektor in einem Eigenraum ist selbst Eigenvektor!). Dann muss B in der Basis $\{|a_k^i\rangle\}$ eine Blockdiagonalform übernehmen (der Basis wird so geordnet, dass Eigenvektoren zu gleichen Eigenwerten nebeneinander sind),

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & B_2 & 0 & \\ 0 & 0 & B_3 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

wobei jeder Block B_n auf der Eigenraum $\mathscr{A}_n$ von A zum Eigenwert a_n wirkt.

(c) Die Blocks B_n sind im allgemein nicht diagonal. Aber jeder Block B_n kann innerhalb der Eigenraum $\mathscr{A}_n$ diagonalisiert werden durch geeignete Wahl einer Basis $\left\{|c_n^i\rangle\right\}_i$. Beachte, dass jeder Vektor $|c_n^i\rangle$ zu einem Eigenraum von A gehört und ist damit selber Eigenvektor von A. So sind $\{|c_n^i\rangle\}$ eine Eigenbasis von A, und per Konstruktion auch eine Eigenbasis von B.

Wir zeigen jetzt die Gegenrichtung. Sei $\{|\psi_j\rangle\}$ eine gemeinsame Eigenbasis zu A und B. Jede Wirkung des Kommutators auf einem gemeinsamen Eigenvektor zu A und B verschwindet, da mit $A|\psi_j\rangle = a_j|\psi_j\rangle$ und $B|\psi_j\rangle = b_j|\psi_j\rangle$ gilt

$$[A, B]|\psi_j\rangle = AB|\psi_j\rangle - BA|\psi_j\rangle = a_j b_j|\psi_j\rangle - a_j b_j|\psi_j\rangle = 0 \ .$$

Alle kets $|\psi\rangle$ lassen sich in der Basis $\{|\psi_j\rangle\}$ zerlegen; so gilt für alle $|\psi\rangle$

$$[A, B]|\psi\rangle = 0$$

und damit $[A, B] = 0$.

Übung 3. Bohr-Sommerfeld Quantisierung (1915)

Lernziel: In dieser Übung wird die Bohr-Sommerfeld Quantisierung durch Anwendung auf den harmonischen Oszillator veranschaulicht.

In der Bohr-Sommerfeld Quantentheorie gelten die Regeln der klassischen Mechanik, wobei nur solche Teilchenbahnen erlaubt sind, für die gilt[1]

$$J(E) = \oint_{H(\mathbf{p},\mathbf{q})=E} \mathbf{p}\, d\mathbf{q} = nh. \tag{4}$$

Das Integral ist dabei über eine geschlossene Bahn im Phasenraum $\{p, q\}$ *auszuwerten.*

(a) *Betrachte den eindimensionalen harmonischen Oszillator,*

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \tag{5}$$

und wende die Bohr-Sommerfeld Quantisierungsregeln auf dieses System an. Berechne Energie, Periode und Amplitude (Auslenkung) der quantisierten Bahnen.

Hinweis: Der Phasenraum ist eine Ellipse.

Lösung Die Wirkungsvarible $J(E)$ ergibt sich als Oberflächenintegral

$$J(E) = \oint pdq. \tag{L.7}$$

Eine direkt Integration kann man jedoch vermeiden, da der Phasenraum eine Ellipse mit dem Rand $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$ darstellt. Die Wirkvariable

$$J(E) = \sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\pi = \frac{2\pi E}{\omega}, \tag{L.8}$$

entspicht damit der Fläche dieser Ellipse. Aus der Bohr-Sommerfeld Quantisierung folgt

$$E_n = \frac{h}{2\pi}\omega n = \hbar\omega n. \tag{L.9}$$

Die Amplitude entspricht der Halbachse entlang q und damit

$$A_n = \sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}n}. \tag{L.10}$$

Die Periode $T = J(E_n)/E_n = 2\pi/\omega$ ist nicht von n abhängig.

[1] Diese Bohr-Sommerfeld Quantisierungsbedingung $J(E) = nh$ lässt sich folgendermaßen motivieren; die klassisch erlaubte Bewegung wird so eingeschränkt, dass die Bahn einer Periode einem ganzzahligen Vielfachen der jeweiligen de Broglie Wellenlänge entspricht, d.h.

$$n = \oint \frac{dq}{\lambda} = \oint \frac{dq}{h/p} = \frac{1}{h}\oint p\, dq \tag{3}$$

Übung 4. Parametric Plot zum Tunnelproblem

Lernziel: In dieser Übung repetieren wir das Tunnelproblem (siehe Skript Kapitel 3.4).

Lies nochmals das Kapitel 3.4 im Skript (zum Tunneleffekt) und stelle sicher dass Du jeden Schritt nachvollziehen kannst.

In Gleichung (3.44) sehen wir dass der Transmissionskoeffizient gegeben ist durch

$$t = \frac{2ik\alpha}{2ik\alpha\cosh(\alpha\omega) - (\alpha^2 - k^2)\sinh(\alpha\omega)} \tag{6}$$

Erstelle einen parametrischen Plot für den Transmission und Reflexionskoeffizient im Bereich $E \in (0, V)$.

Lösung Wir erinnern uns dass $|r|^2 + |t|^2 = 1$ und $t^* r + r^* t = 0$ gilt. Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $r := a + ib$ und $t = c + id$ kriegen wir

$$c = \frac{2k^2\alpha^2\cosh(\alpha\omega)}{(k^2 - \alpha^2)^2\sinh^2(\alpha\omega) + 4k^2\alpha^2\cosh^2(\alpha\omega)} \tag{L.11}$$

und

$$d = \frac{2k\alpha(k^2 - \alpha^2)\sinh(\alpha\omega)}{(k^2 - \alpha^2)^2\sinh^2(\alpha\omega) + 4k^2\alpha^2\cosh^2(\alpha\omega)} \ . \tag{L.12}$$

Aus den Gleichungen (siehe oben) kriegen wir zwei Gleichungen für a und b

$$ac = bd \quad \text{und} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \ . \tag{L.13}$$

Also haben wir a, b, c, und d und somit auch r und t spezifiziert und können das Ganze plotten. Auf der Vorlesungswebsite haben wir ein Mathematica Skript geschrieben welches den Plot generiert. Figure 1 zeigt den Plot.

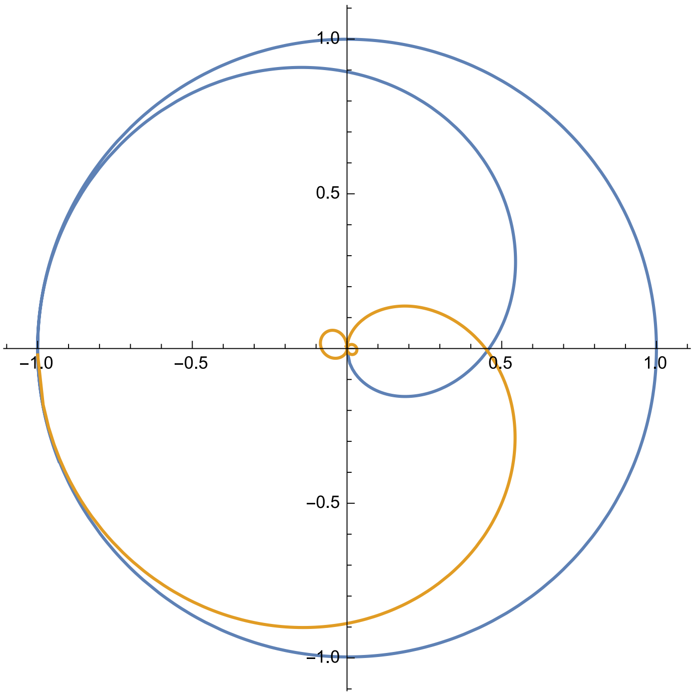

Abbildung 1: Plot in der komplexen Ebene (x-Achse ist Realteil und y-Achse ist Imaginärteil) vom Transmissionskoeffizienten (in blau) und dem Reflexionskoeffizienten (gelb).