Exercise 1. Klassische Wirkung

(a) Wir variieren die Bahn $q \to q + \delta q$ ($\dot{q} \to \dot{q} + \delta\dot{q}$) bei fixierten Endpunkten, d.h. $\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0$. Dies ergibt

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) . \tag{S.1}$$

Mit $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$ können wir den zweiten Term partiell integrieren. Wir erhalten

$$\delta S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \, . \tag{S.2}$$

Die Endpunkte sind fixiert, d.h.

$$\frac{\delta S}{\delta q} = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \, . \tag{S.3}$$

Daraus erhalten wir die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \, . \tag{S.4}$$

(b) Zur Bestimmung der klassischen Bahnen benutzen wir die Euler-Lagrange-Gleichung aus a). Anschliessend integrieren wir entlang dieser Bahnen, um die klassische Wirkung zu erhalten.

(i) Für ein freies Teilchen ist die Bewegung wohl bekannt

$$q(t) = vt + q_0 = \frac{q_b}{t_b} t \tag{S.5}$$

damit ergibt sich die klassische Wirkung zu

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \frac{m\dot{q}^2}{2} dt = \frac{m}{2} \int_0^{t_b} \left(\frac{q_b}{t_b} \right)^2 dt = \frac{m}{2} \frac{q_b^2}{t_b}. \tag{S.6}$$

(ii) Die klassische Lösung des harmonischer Oszillators lautet

$$q(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \tag{S.7}$$

Die Randbedingungen ergeben $\varphi = 0$ and $A = q_b / \sin(\omega t_b)$. Damit ergibt sich die Wirkung zu

$$S = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \int_0^{t_b} \cos(2\omega t) dt = \frac{m\omega A^2}{2} \sin(\omega t_b) \cos(\omega t_b) = \frac{m\omega q_b^2}{2 \tan(\omega t_b)}. \tag{S.8}$$

(iii) Die klassische Lösung eines konstanten Kraftfeldes lautet

$$q(t) = -\frac{F}{2m} t^2 + Ct, \tag{S.9}$$

wobei $C = \frac{F}{2m} t_b + \frac{q_b}{t_b}$. Damit ergibt sich die Wirkung zu

$$S = \int_0^{t_b} \left(\frac{F^2}{m} t^2 - 2FCt + \frac{mC^2}{2} \right) dt = -\frac{F^2 t_b^3}{24m} - \frac{F q_b t_b}{2} + \frac{m q_b^2}{2 t_b}. \tag{S.10}$$

(c) Die allgemeine Variation ist gegeben durch:

$$\delta S = S[q+\delta q; t_a+\delta t_a, t_b+\delta t_b] - S[q; t_a, t_b]\,. \tag{S.11}$$

Einsetzen der Definition des Wirkungsfunktional ergibt:

$$\begin{aligned}
\delta S =& \int_{t_a+\delta t_a}^{t_b+\delta t_b} \mathcal{L}[q(t)+\delta q(t), \dot q(t)+\delta\dot q(t), t]dt - \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}[q(t), \dot q(t), t]dt \\
=& \int_{t_a}^{t_b} (\mathcal{L}[q(t)+\delta q(t), \dot q(t)+\delta\dot q(t), t] - \mathcal{L}[q(t), \dot q(t), t])dt \\
&+ \int_{t_b}^{t_b+\delta t_b} \mathcal{L}[q(t)+\delta q(t), \dot q(t)+\delta\dot q(t), t]dt - \int_{t_a}^{t_a+\delta t_a} \mathcal{L}[q(t)+\delta q(t), \dot q(t)+\delta\dot q(t), t]dt \\
=& \int_{t_a}^{t_b} dt\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q(t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\delta\dot q(t)\right) + \mathcal{L}[q(t_b), \dot q(t_b), t_b]\delta t_b - \mathcal{L}[q(t_a), \dot q(t_a), t_a]\delta t_a \\
=& \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\delta q(t)\Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\right)\delta q(t)dt + \mathcal{L}[q(t), \dot q(t), t]\delta t\Big|_{t_a}^{t_b} \\
=& \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\delta q(t)\Big|_{t_a}^{t_b} + \mathcal{L}[q(t), \dot q(t), t]\delta t\Big|_{t_a}^{t_b}\,.
\end{aligned} \tag{S.12}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass die klassische Bahn die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt. Mit $\delta q(t_i) = \delta q_i - \dot q(t_i)\delta t_i$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\delta S =& \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\delta q\Big|_{t_a}^{t_b} + \left(\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\dot q\right)\delta t\Big|_{t_a}^{t_b} \\
=& \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\delta q\Big|_{t_a}^{t_b} - \mathcal{H}\delta t\Big|_{t_a}^{t_b}\,,
\end{aligned} \tag{S.13}$$

wobei $\mathcal{H}$ die Hamiltonfunktion ist und wir definieren $\delta q|_{t_i} = \delta q_i$, $\delta t|_{t_i} = \delta t_i$.
Variieren wir nun den Endpunkt $q_b \to \bar q_b = q_b + \delta q_b$ bei festgehaltenem q_a,t_a und t_b erhalten wir

$$\frac{\delta S}{\delta q_b} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}(q_b, \dot q_b, t_b) = p_b, \tag{S.14}$$

wobei wir den konjugierten Impuls p_b eingeführt haben.
Für eine Variation der Endzeit $t_b \to \bar t_b = t_b + \delta t_b$ mit $\delta q_a = \delta q_b = \delta t_a = 0$ erhalten wir

$$\frac{\delta S}{\delta t_b} = -\mathcal{H}(q_b, p_b, t_b) \tag{S.15}$$

Exercise 2. Gaußsche Integrale

(a) Einerseits gilt

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}dx\,dy = \int e^{-ax^2}dx\int e^{-ay^2}dy = \Big(\int e^{-ax^2}dx\Big)^2. \tag{S.16}$$

Andererseits ergibt direkte Integration unter Verwendung von Polarkoordinaten $\{r, \varphi\}$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\infty dr\, re^{-ar^2} \overset{ar^2\to t}{=} \frac{\pi}{a}\int_0^\infty dt\, e^{-t} = \frac{\pi}{a}. \tag{S.17}$$

Daraus folgt $\int e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi/a}$.
Für die Gauss-Verteilung substituiere $y = x/(\sqrt{2}\sigma)$ und wir erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} = 1\,. \tag{S.18}$$

(b) Der Exponent kann durch quadratische Ergänzung auf die Form eines Gaußschen Integrals gebracht werden. Damit ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-\frac{b}{2a})^2+\frac{b^2}{4a}+c}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}+c}\,.$$

(c) Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ikx}dx =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-ikx}dx\\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2-\frac{k^2}{2}}\,dx\\ =&\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{k^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\\ =&e^{-\frac{k^2}{2}}\,,\end{aligned} \tag{S.19}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Substitution $y = 1/\sqrt{2}(x+ik)$ benutzt haben.

(d) * Zunächst wird eine beliebige Zeit t_c gewählt, wobei $t_a < t_c < t_b$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int dx_c\, K(b,c)K(c,a) &= \frac{m}{2\pi i\hbar\sqrt{t_{bc}t_{ca}}}\int dx_c \exp\frac{im(x_b-x_c)^2}{2\hbar t_{bc}}\exp\frac{im(x_c-x_a)^2}{2\hbar t_{ca}}\\ &= \frac{m}{2\pi i\hbar\sqrt{t_{bc}t_{ca}}}\int dx_c \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t_{bc}t_{ca}}[t_{ba}x_c^2 - 2(t_{ca}x_b + t_{bc}x_a)x_c + t_{ca}x_b^2 + t_{bc}x_a^2]\right\}\\ &= \frac{m}{2\pi i\hbar\sqrt{t_{bc}t_{ca}}}\sqrt{-\frac{2\pi\hbar t_{bc}t_{ca}}{imt_{ba}}}\exp\left\{\frac{m(t_{ca}x_b+t_{bc}x_a)^2}{2\hbar i t_{bc}t_{ca}t_{ba}} + \frac{im}{2\hbar t_{bc}t_{ca}}(t_{ca}x_b^2+t_{bc}x_a^2)\right\}\\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t_{ba}}}\exp\left\{\frac{im}{2\hbar t_{ba}}\left[-\frac{(t_{ca}x_b+t_{bc}x_a)^2}{t_{bc}t_{ca}} + \frac{t_{ba}(t_{ca}x_b^2+t_{bc}x_a^2)}{t_{bc}t_{ca}}\right]\right\}\\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t_{ba}}}\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar t_{ba}} = K(b,a).\end{aligned}$$

Hier wurde die Integration über x_c unter Verwendung von (b) durchgeführt.

Exercise 3. Plancksches Strahlungsgesetz (1900)

(a) Der Nenner ergibt sofort $1/\beta$. Für den Zähler nutzen wir aus, dass der Integrand geschrieben werden kann als $-\partial_\beta(e^{-\beta E})$. Der Zähler $-\partial_\beta(1/\beta) = 1/\beta^2$ ergibt sich somit durch Ableitung des Nenners und wir finden

$$\langle E\rangle_{\text{klass.}} = 1/\beta = k_B T. \tag{S.20}$$

(b) Die diskrete Summe berechnen wir ebenso. Der Nenner entpuppt sich als eine einfache geometrische Reihe und wir finden $e^{\beta\hbar\omega}/(e^{\beta\hbar\omega}-1)$. Der Zähler ist die Ableitung des Nenners nach $-\beta$. Daraus ergibt sich dann

$$\langle E\rangle_{\text{quant.}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}. \tag{S.21}$$

(c) Entwickeln wir den Ausdruck (S.21) in den Grenzfällen $kT \gg \hbar\omega$ und $kT \ll \hbar\omega$ finden wir

$$\langle E\rangle_{\text{quant.}} = \begin{cases} k_B T & \text{wenn} \quad \hbar\omega \ll k_B T \\ \hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega} & \text{wenn} \quad \hbar\omega \gg k_B T. \end{cases} \tag{S.22}$$

Im Grenzfall kleiner Modenenergien (verglichen mit der Temperatur) konvergiert der Ausdruck (S.21) zum klassischen Ausdruck (S.20). Für hohe Energien $\hbar\omega \gg k_B T$ wird der Erwartungswert hingegen exponentiell gedämpft.

(d) Wir erhalten

$$\begin{aligned} U =& 2\frac{V}{(2\pi)^3}\int dk^3 \frac{\hbar\omega_k}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1} \\ =& 2\frac{V}{(2\pi)^3}\int dk\, 4\pi k^2 \frac{\hbar ck}{e^{\beta\hbar ck}-1} \\ =& \frac{V}{\pi^2}\frac{\hbar c}{(\beta\hbar c)^4}\int dx\, \frac{x^3}{e^x-1} \\ =& \frac{V}{\pi^2}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}\frac{\pi^4}{15} \\ =& \frac{V\pi^2}{15}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}, \end{aligned} \tag{S.23}$$

wobei wir die Substitution $x = \beta\hbar ck$ benutzt haben.
Im klassischen Fall würden wir $\sum_{k,\lambda} k_B T = \infty$ erhalten, was offensichtlich keinen Sinn macht. Die quantenmechanische Sichtweise ergibt uns ein konvergentes Resultat.