Übung 1. Freies Teilchen im Heisenberg-Bild

Lernziel: Im Heisenberg-Bild sind Operatoren statt Wellenfunktionen zeitabhängig. Wir betrachten als illustratives Beispiel das freie Teilchen im Heisenberg-Bild.

(a) Betrachte ein freies Teilchen in 1D mit Hamilton-Operator $H = \frac{p^2}{2m}$ und bestimme den Ortsoperator $X_H(t)$ im Heisenberg-Bild.

(b) Zeige, dass hier gilt

$$\Delta X_H(0) \cdot \Delta X_H(t) \geq \frac{\hbar t}{2m}. \tag{1}$$

Übung 2. Gestörter Potentialtopf

Lernziel: In dieser Aufgabe soll die stationäre nicht-entartete Störungstheorie geübt werden.

Wende die stationäre (nicht-entartete) Störungstheorie für den eindimensionalen Potentialtopf $H = \frac{p^2}{2m} + V(x) + H'$,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq L/2 \\ \infty & |x| > L/2, \end{cases} \tag{2}$$

mit Störung $H' = \lambda x$ an und bestimme die Korrekturen der Grundzustandsenergie bis zur zweiten Ordnung im Störterm H'. Sind die Korrekturen negativ oder positiv?
Hinweis: Das Resultat ist eine unendliche Summe. Benutze, dass für ganzzahlige m gilt

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\, \theta \cos\theta \sin(2m\theta) = (-1)^{m+1} \frac{8m}{(4m^2-1)^2}. \tag{3}$$

Übung 3. Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld

Lernziel: In dieser Aufgabe üben wir die zeitabhängige Störungstheorie, wobei die Störung abrupt eingeschaltet wird. Das st"orungstheoretische Resultat wird mit der exakten Lösung verglichen.

Ein geladenes Teilchen der Ladung $e > 0$ befinde sich in einem harmonischen Potential $V(x) = \frac{1}{2} m\omega x^2$ im Grundzustand $|0\rangle$. Zur Zeit $t = 0$ wird ein konstantes, homogenes elektrisches Feld $E > 0$ angelegt.

(a) Unter Verwendung der zeitabhängigen Störungstheorie soll die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{0\to 1}$, mit welcher das Teilchen von Zustand $|0\rangle$ in Zustand $|1\rangle$ übergeht (zu einer Zeit $t > 0$) berechnet werden. $|1\rangle$ bezeichnet dabei den ersten angeregten Zustand des ungestörten Systems. Finde das Resultat bis einschliesslich $O(t^2)$.

(b) Beantworte die gleiche Frage für $P_{0\to 0}$. Was kann man jetzt über $P_{0\to n}$ für $n \geq 2$ sagen?

Hinweis: Betrachte Gleichung (9.84) des Skripts.

(c)* Löse das Problem exakt (d.h. finde eine exakte Formel für $P_{0\to n}$). So kann man durch Vergleich explizit sehen bis auf welche Zeitskala die Störungstheorie eine gute Approximation der exakten Lösung ist.

Hinweis:

I. Schreibe den Hamilton-Operator mit dem Translationsoperator $T = e^{-ix_0 p/\hbar}$, *und benutze, dass* $e^{ix_0 p/\hbar}\,|0\rangle = |\alpha_0\rangle$ *ein kohärenter Zustand ist (vgl. Serie 7).*

II. Der Überlapp zwischen zwei kohärenten Zuständen $|\alpha\rangle$ *und* $|\beta\rangle$ *ist gegeben durch* $\langle\alpha\rangle\,\beta = e^{-|\alpha-\beta|^2/2} e^{iIm(\alpha^*\beta)}$.