

Übung 1. Der Aharonov-Bohm-Effekt¹

Lernziel: Erweitert man das Doppelspaltexperiment um eine magnetische Spule, die sich in der mittleren Wand befindet (siehe Abb. 2), deren Magnetfeld die Elektronen jedoch nicht direkt beeinflussen kann, so hängt das Interferenzmuster trotzdem vom magnetischen Fluss durch die Ebene ab. Dies ist der Aharonov-Bohm-Effekt, den wir in dieser Aufgabe herleiten wollen.

- (a) Betrachte ein Elektron, das sich in einem Gebiet G bewegt und ein zeitunabhängiges Magnetfeld \mathbf{B} , das in diesem Gebiet verschwindet (z. B. ausserhalb einer unendlich langen Spule), siehe Abb. 1.

Es sei $\psi_0(\mathbf{x})$ die Wellenfunktion bei ausgeschaltetem Magnetfeld ($\mathbf{B} = 0$ überall) und $\psi_B(\mathbf{x})$ die Wellenfunktion bei eingeschaltetem Magnetfeld ($\mathbf{B} = 0$ in G). Zeige, dass

$$\psi_B(\mathbf{x}) = \psi_0(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s})\right), \quad (1)$$

wobei $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in G$ durch einen Pfad in G verbunden sind und \mathbf{A} das zum eingeschalteten Magnetfeld $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ gehörige Vektorpotential ist.

Hint: Finde einen Ausdruck für das Vektorpotential im Gebiet G und verwende eine passende Eichtransformation.

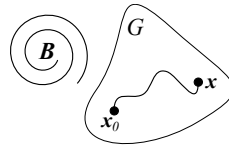


Abbildung 1: Das Elektron bewegt sich im magnetfeldfreien Gebiet G von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x} . Eine Spule erzeugt in ihrem Innern ein Magnetfeld \mathbf{B} , das senkrecht zur Zeichenebene steht.

- (b) Nun betrachten wir das erweiterte Doppelspaltexperiment. Berechne die Intensität des Interferenzmusters.

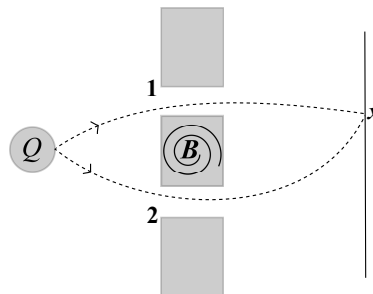


Abbildung 2: Die Elektronen bewegen sich von der Quelle durch den Doppelspalt zum Schirm. Das Magnetfeld verschwindet im Bereich wo sich die Elektronen aufhalten.

¹Aharonov, Yakir, and Bohm, David. "Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory." Physical Review 115.3 (1959): 485, und Webb, Richard A., et al. "Observation of h/e Aharonov-Bohm oscillations in normal-metal rings." Physical review letters 54.25 (1985): 2696..

Übung 2. Algebra und Eigenschaften des Drehimpulsoperators

Lernziel: Der quantenmechanische Drehimpuls spielt eine zentrale Rolle zur Lösung von rotationssymmetrischen Problemen in der Atom und Kernphysik; und zur Beschreibung des Spins. In dieser und der folgenden Aufgabe sollen verschiedene grundlegende Eigenschaften und Darstellungen des Drehimpulsoperators gezeigt werden.

Zeige folgende Eigenschaften des (Bahn-)drehimpulsoperators $\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$:

- (a) $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$, wobei ϵ_{ijk} der vollständig anti-symmetrische Levi-Civita Tensor ist.
 (b) $[L_i, \mathbf{L}^2] = 0$ und $[L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}$, mit $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$
 (c) $\langle l, m | L_x | l, m \rangle = \langle l, m | L_y | l, m \rangle = 0$ und $\langle l, m | L_x^2 | l, m \rangle = \langle l, m | L_y^2 | l, m \rangle = \frac{\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2}{2}$

Was bedeutet dieses Resultat für die Varianz bezüglich L_x und L_y für verschiedene m ($m = 0, m = \pm l, m \neq \pm l$) bei gegebenem l ?

- (d) $\langle l, m | L_x L_y | l, m \rangle = \frac{1}{2}i\hbar^2 m$

Übung 3. Darstellung des Drehimpulsoperators

Lernziel: Die Fälle $l = 1/2$ und $l = 1$ sind in der Physik von spezieller Bedeutung. In dieser Aufgabe analysieren wir die Wirkung des Drehoperators für $l = 1/2$ und finden die Matrixdarstellung des Drehimpulsoperators für $l = 1/2$ und $l = 1$. Eine ähnliche Betrachtung kann man für jeden erlaubten Wert von l durchführen.

- (a) Es sei $|l, m\rangle$ ein gemeinsamer Eigenzustand der Operatoren \mathbf{L}^2 und L_z . Weiterhin sei $\hat{\mathbf{n}} \in R^3$ ein beliebiger normierter Vektor ($\hat{\mathbf{n}}^2 = 1$). Im Folgenden wollen wir den Unterraum zu $l = 1/2$ betrachten und schreiben $|+\rangle = |l = 1/2, m = 1/2\rangle$, $|-\rangle = |l = 1/2, m = -1/2\rangle$ (also, $L_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$). Berechne

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L})^2 |+\rangle \quad \text{und} \quad (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L})^2 |-\rangle. \quad (2)$$

Hint: Verwende L_+ , L_- und L_z .

- (b) Der Operator einer Drehung um die Drehachse $\hat{\mathbf{n}}$ mit Dreiwinkel ω ist gegeben durch

$$U_{\omega\hat{\mathbf{n}}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\omega\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}\right). \quad (3)$$

Zeige, dass dieser Operator, in der $l = 1/2$ -Darstellung, als

$$U_{\omega\hat{\mathbf{n}}} = \cos(\omega/2)\mathbb{I} - \frac{2i}{\hbar}\sin(\omega/2)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}) \quad (4)$$

geschrieben werden kann. Ist $U_{0\hat{\mathbf{n}}} = U_{2\pi\hat{\mathbf{n}}}$?

- (c) Finde die Operatoren L_x, L_y, L_z und \mathbf{L}^2 in der Basis

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

(d) Für $l = 1$ finde die Operatoren L_x , L_y , L_z und \mathbf{L}^2 in der Basis

$$|l = 1, m = 1\rangle = |1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$