Übung 1. Harmonischer Oszillator

Lernziel: Zur (eleganten) Lösung des harmonischen Oszillators wurden Auf- und Absteige-Operatoren eingeführt. Das Ziel dieser Übung ist das Rechnen mit diesen zu üben und Eigenschaften des harmonischen Oszillators zu untersuchen.

Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \,. \tag{1}$$

Auf- und Absteige-Operatoren sind definiert durch

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}p\right) , \tag{2}$$

$$a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q - \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}p\right) , \tag{3}$$

unb erfüllen folgende Eigenschaften:

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1 \,, \tag{4}$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \,, \tag{5}$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \,, \tag{6}$$

wobei $|n\rangle$ ein Eigenzustand zu H ist.

(a) Berechne $\langle n'|q|n\rangle$, $\langle n'|p|n\rangle$, $\langle n'|\{q,p\}|n\rangle$, $\langle n'|q^2|n\rangle$ und $\langle n'|p^2|n\rangle$.

(b) Berechne die Standardabweichungen von q, Δq, und p, Δp, bezüglich des Eigenzustands $|n\rangle$ und überprüfe die Heisenbergsche Unschärferelation. Was fällt dir für den Grundzustand, $|0\rangle$, auf?

(c) Für stationäre Zustände (= Eigenzustände des Hamiltonoperators) kann gezeigt werden, dass

$$2\langle T\rangle = \langle q\frac{dV}{dq}\rangle \,. \tag{7}$$

Das Virialtheorem behält somit auch in der Quantenmechanik seine Gültigkeit [1]. Überprüfe dies für den harmonischen Oszillator.

Übung 2. Coherent states and the displacement operator

Lernziel: In this exercise we investigate the quantum states that behave 'most classically', they are called coherent states. We learn about the displacement operator which creates these states and then investigate what 'most classically' actually means. These states play a prominent role in quantum optics.

[1] Beachte, dass im klassischen Fall der Erwartungswert einem Zeitmittel entspricht.

Consider a harmonic oscillator with the Hamiltonian

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2). \tag{8}$$

Here $a^\dagger$ and a are the creation and annhilation operators respectively and satisfy $[a, a^\dagger] = 1$ thus describing a bosonic degree of freedom. A coherent state $|\alpha\rangle$ is a normalised eigenvector of the annihilation operator, a, with eigenvalue $\alpha \in \mathbb{C}$, such that $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ and $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$. Throughout this problem we will use dimensionless position and momentum operators with the following properties:

$$\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) = \hat{x}\sqrt{m\omega/\hbar} \tag{9}$$

$$\tilde{p} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(a - a^\dagger) = \hat{p}/\sqrt{m\omega\hbar} \tag{10}$$

(a) The displacement operator is given by

$$D(\alpha) = exp\left(\alpha a^\dagger - \alpha^* a\right). \tag{11}$$

Show that it may also be given by:

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \qquad \text{and} \qquad D(\alpha) = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger}. \tag{12}$$

(b) Show that $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ is a coherent state. Here $|0\rangle$ is the ground state of the system.

(c) Express $D(\alpha + \beta)$ in terms of $D(\alpha)$ and $D(\beta)$. Interpret your result.

(d) Evaluate $\langle\tilde{x}\rangle$, $\langle\tilde{p}\rangle$, $\langle\tilde{x}^2\rangle$, $\langle\tilde{p}^2\rangle$ and $\langle\hat{n}\rangle$ for a state $|\alpha\rangle$. Use your result to show that the coherent states minimise the Heisenberg uncertainty. Evaluate the expectation value of the energy of such a state.

(e) Calculate $|\alpha\rangle(t) = e^{-iHt/\hbar}|\alpha\rangle$ to show $|\alpha\rangle(t) = |\alpha(t)\rangle e^{-i\omega t/2}$, with $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$.

(f) We now define $|x_0, p_0\rangle = D(\frac{1}{2}(x_0 + ip_0))|0\rangle$, with x_0 and p_0 real. Show that

$$|x_0, p_0\rangle(t) = |x_0(t), p_0(t)\rangle e^{i\phi(t)}. \tag{13}$$

Here $x_0(t)$ and $p_0(t)$ describe the classical path of a harmonic oscillator with initial conditions $x_0(0) = x_0$ and $p_0(0) = p_0$. The parameter $\phi(t)$ is an overall phase. What is the significance of this result?

(g) * Evaluate $\langle\hat{n}^m\rangle$, what probability distribution does this correspond to?

Übung 3. Eichinvarianz der Stromdichte

Lernziel: In der Physik spielen Symmetrien eine zentrale Rolle. Neben der Klassifikation von Lösungen, können sie zur Vereinfachung von Problemen beitragen. In dieser Aufgabe lernen wir eine (nicht offensichtliche) Symmetrie des Teilchens im elektromagnetischen Feldes kennen, die Eichsymmetrie.

Die Stromdichte $\boldsymbol{j}(x)$ eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld ist definiert durch

$$\boldsymbol{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{q}{mc}\boldsymbol{A}|\psi|^2\,, \tag{14}$$

wobei $\psi(x)$ der Zustand des Teilchens und $\boldsymbol{A}(x,t)$ das Vektorpotential ist.
Zeige, dass sowohl die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\boldsymbol{j}$ als auch die zeitabhängige Schrödingergleichung invariant sind unter der Eichtransformation

$$\psi \to \tilde{\psi} = \psi e^{(iq/\hbar c)\chi}\,, \qquad \boldsymbol{A} \to \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \nabla\chi\,, \qquad \varphi \to \tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{c}\partial_t\chi\,, \tag{15}$$

für eine beliebige (differenzierbare) Funktion $\chi(x,t)$.

Übung 4. Freies Elektron im Magnetfeld: Landau Quantisierung

Lernziel: Wir lernen in dieser Übung, wie ein Magnetfeld das Spektrum freier Elektronen in Landauniveaus quantisiert. Wir bestimmen wie die Wellenfunktionen in einer bestimmten Eichung aussehen und berechnen die Hall-Leitfähigkeit des Systems.

Wir betrachten ein Elektron in einem homogenen Magnetfeld B in z-Richtung. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2\,, \tag{16}$$

wobei $\boldsymbol{A}$ das Vektorpotential ist, m und e die Masse und Ladung des Teilchens und c die Lichtgeschwindigkeit. In Landau-Eichung wählt für das Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (0, Bx, 0)$.

(a) Löse die Schrödingergleichung mittels eine Separationsansatzes und zeige, dass sich das Problem auf das eines harmonischen Oszillators zurückführen lässt. Führe zur Vereinfachung die Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/mc$ und die magnetischen Länge $\ell = \sqrt{\hbar c/eB}$ ein. Bestimme zu allen Energieeigenwerten (Landauniveaus) die zugehörigen Wellenfunktionen.

(b) Wir betrachten nun ein endliches System mit Abmessungen L_x und L_y. Bestimme den Entartungsgrad N_n der Landauniveaus. Vergleiche das Ergebnis mit der Anzahl Flussquanten $N_\Phi = \Phi/\Phi_0$ (mit $\Phi_0 = hc/e$) die das System durchfliessen.

(c) Zusätzlich zum Magnetfeld werde nun noch ein homogenes elektrisches Feld entlang x angelegt. Beschreibe dieses durch das Potential $\phi(x) = -Ex$. Wie ändert sich das Spektrum?

(d) Berechne den Ladungsstrom

$$I_y = -e\int dx\; j_y(x) \tag{17}$$

eines besetzten Eigenzustandes $E_{n,k}$ von $\mathcal{H}$. Vergleiche dein Ergebnis mit dem klassischen Resultat (klassischer Hall-Effekt). Bestimme die Stromdichte $J_n = (I_y/L_xL_y)N_n$ eines gefüllten Landau-Niveaus und zeige, dass gilt $\sigma_{xy}^n = J_n/E = e^2/h$. Dieses Resultat ist unabhängig von n und führt zur bekannten Quantisierung des Hall-Effektes.