Übung 1. Wellenfunktionen im Impulsraum

Lernziel: In dieser Übung repetieren wir das Spielen mit der Dirac Notation, Basen und Darstellungen.

(a) Beweise die folgenden Identitäten:

$$\text{i)}\ \langle p'|\, x\, |\alpha\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p') \qquad \text{ii)}\ \langle\beta|\, x\, |\alpha\rangle = \int \frac{\partial}{\partial p}{}' \phi^*_\beta(p') i\hbar \frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p')\ ,$$

wobei $\phi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ und $\phi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ Wellenfunktionen im Impulsraum sind.

(b) Wir betrachten ein symmetrisches Potential, d.h., $V(x) = V(-x)$ und definieren den (Symmetrie) Operator P, den Paritätsoperator

$$(P\Psi)(x) = \Psi(-x), \qquad \langle x|P|\Psi\rangle = \langle -x|\Psi\rangle\ . \tag{1}$$

Zeige dass der Hamiltonoperator $H = -\frac{\hbar}{2m}\partial_x^2 + V(x)$ mit P kommutiert, d.h. zeige dass

$$\langle x|HP|\Psi\rangle = \langle x|PH|\Psi\rangle\ . \tag{2}$$

Übung 2. Kommutierende Observablen.

Lernziel: In dieser Übung verinnerlichen wir was genau erfüllt sein muss dass zwei Observablen kommutieren.

Zeige, dass im endlich-dimensionalen Fall zwei Observablen genau dann kommutieren, wenn sie gleichzeitig diagonalisierbar sind.

Hinweise: Die mathematische Aussage lautet: Für zwei selbstadjungierte Operatoren A, B gilt $[A, B] = 0$ genau dann, wenn eine Basis $\{|\phi_n\rangle\}$ existiert so dass alle $|\phi_n\rangle$ gleichzeitig Eigenvektoren von A und B sind.

Nehme zuerst an, dass $[A, B] = 0$.

(a) Zeige: Wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von der Observable A ist, dann ist $B\,|\psi\rangle$ auch ein Eigenvektor von A mit gleichem Eigenwert.

(b) Sei $\{|a_n^i\rangle\}$ eine Basis von Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\{a_n\}$ (der Index i entspricht Entartungen, d.h. wenn es mehrere Eigenvektoren zu einem gleichen Eigenwert gibt).

Stelle fest, dass B in dieser Basis Blockdiagonalform hat, wobei jeder Block auf einem Eigenraum von A wirkt.

(c) Bilde eine explizite Basis, deren Elemente gleichzeitig Eigenvektoren von A und B sind.

Für die Gegenrichtung, betrachte die Wirkung des Kommutators $[A, B]$ auf eine bestimmte Basis.

Übung 3. Bohr-Sommerfeld Quantisierung (1915)

Lernziel: In dieser Übung wird die Bohr-Sommerfeld Quantisierung durch Anwendung auf den harmonischen Oszillator veranschaulicht.

In der Bohr-Sommerfeld Quantentheorie gelten die Regeln der klassischen Mechanik, wobei nur solche Teilchenbahnen erlaubt sind, für die gilt[1]

$$J(E) = \oint_{H(\mathbf{p},\mathbf{q})=E} \mathbf{p}\; d\mathbf{q} = nh. \tag{4}$$

Das Integral ist dabei über eine geschlossene Bahn im Phasenraum $\{p, q\}$ auszuwerten.

(a) Betrachte den eindimensionalen harmonischen Oszillator,

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \tag{5}$$

und wende die Bohr-Sommerfeld Quantisierungsregeln auf dieses System an. Berechne Energie, Periode und Amplitude (Auslenkung) der quantisierten Bahnen.

Hinweis: Der Phasenraum ist eine Ellipse.

Übung 4. Parametric Plot zum Tunnelproblem

Lernziel: In dieser Übung repetieren wir das Tunnelproblem (siehe Skript Kapitel 3.4).

Lies nochmals das Kapitel 3.4 im Skript (zum Tunneleffekt) und stelle sicher dass Du jeden Schritt nachvollziehen kannst.

In Gleichung (3.44) sehen wir dass der Transmissionskoeffizient gegeben ist durch

$$t = \frac{2ik\alpha}{2ik\alpha\cosh(\alpha\omega) - (\alpha^2 - k^2)\sinh(\alpha\omega)} \tag{6}$$

Erstelle einen parametrischen Plot für den Transmission und Reflexionskoeffizient im Bereich $E \in (0, V)$.

[1] Diese Bohr-Sommerfeld Quantisierungsbedingung $J(E) = nh$ lässt sich folgendermaßen motivieren; die klassisch erlaubte Bewegung wird so eingeschränkt, dass die Bahn einer Periode einem ganzzahligen Vielfachen der jeweiligen de Broglie Wellenlänge entspricht, d.h.

$$n = \oint \frac{dq}{\lambda} = \oint \frac{dq}{h/p} = \frac{1}{h}\oint p\; dq \tag{3}$$