Übung 1. Rechnen mit Kommutatoren

Lernziel: Die nicht-Kommutierbarkeit von Operatoren gehört zu den grundlegensten Eigenschaften der Quantenmechanik. Diese Übung erlaubt den rechnerischen Umgang mit Operatoren zu vertiefen.

Der Kommutator $[A, B] = AB - BA$ zweier Operatoren A und B ist linear und antisymmetrisch. Zeige, dass neben diesen einfachen Regeln auch folgende Eigenschaften gelten:

(a) Es gilt die Produktregel

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \tag{1}$$

und die Jacobi-Identität,

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \tag{2}$$

Für die nächste Teilaufgabe gelte $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$.

(b) Ermittle induktiv $[A, B^n]$ und $[A^n, B]$, und zeige damit die *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel*

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{3}$$

Hinweis: Zeige, dass $f(t) = e^{tA}e^{tB}$ *die Differentialgleichung* $\frac{df}{dt} = (A + B + t[A, B])f$ *erfüllt und löse diese.*

Übung 2. Quantenmechanische Operatoren zu physikalischen Observablen

Lernziel: Beim Übergang zu quantisierten Systemen stellt sich die Frage, welcher quantenmechanische Operator einer bestimmten klassischen Observablen entspricht. Ist die Observable nämlich aus nicht kommutierenden Grössen zusammengesetzt, ergeben sich unweigerlich Ordnungsprobleme. Wir lernen, was der zu einer physikalischen Observable gehörende Operator erfüllen muss.

Betrachte als Beispiel ein Elektron in einem Festkörper. Die Masse des Elektrons entspricht dann nicht seiner Ruhemasse im Vakuum, sondern einer effektiven Masse beeinflusst durch das Ionengitter. Im Fall einer Heterostruktur (z.B. ein Material mit mehreren Schichten $\mathrm{GaAs}/\mathrm{Al}_x\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{As}$) wird die Masse $m(x)$ ortsabhängig.

(a) Wie sieht der korrekte quantenmechanische Operator für die kinetische Energie aus? Weise die Richtigkeit deiner Behauptung nach, indem du überprüfst, dass der Operator die Voraussetzung einer physikalischen Observable erfülllt.

Hinweis: Hermitizität

(b) Mit der effektiven Masse von der Form

$$m(x) = \begin{cases} m_- & x < 0 \\ m_+ & x > 0, \end{cases} \tag{4}$$

bestimme alle Randbedingungen für die Wellenfunktion an der Fläche $x = 0$.

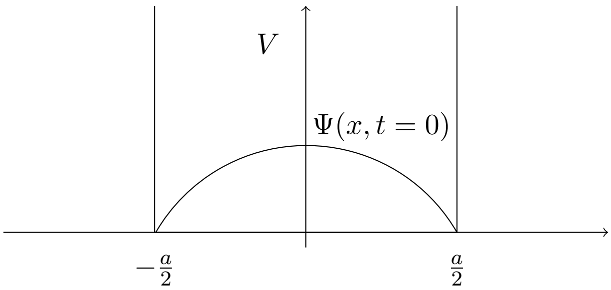
Hinweis: Die Wellenfunktion ist stetig.

(c) Vergleiche nun den Strom bei $x = \pm\epsilon$. Wird die Grenzfläche geladen?

Übung 3. Zeitentwicklung von Teilchen in Potential

Lernziel: Anhand von einem einfach Beispiel soll geübt werden, wie man die Zeitentwicklung eines Teilchens innerhalb der Quantenmechanik berechnet.

Wir betrachten ein Teilchen welches sich für $t < 0$ im unendlichen Potentialtopf



$$V(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

befindet. Das Teilchen befinde sich im Grundzustand (siehe Kapitel 1.6. im Skript)

$$\Psi(x, t) = \cos(\frac{\pi x}{a}) \quad \text{für } t < 0.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Potential abgeschaltet. Berechne die Wellenfunktion des Teilchens für $t > 0$. Das Schlussresutat kann als Integral stehen gelassen werden, d.h., das Integral muss nicht berechnet werden. [**Challenge:** Wer kann das Integral analytisch lösen? Die oder der Erste der dies schafft soll sich bei Prof. Blatter im Büro melden und kann eine Belohnung abholen ;-)]

Übung 4. Hilbert und L^p Räume

Lernziel: Der mathematische Raum auf dem der Formalismus der Quantenmechanik aufgebaut ist ist ein Hilbertraum. Diese Übung soll ein paar Eigenschaften von L^p und insbesondere Hilberträumen repetieren. Wir werden lernen wie man aus einem Vektorraum einen Banachraum und aus einem Banachraum einen Hilbertraum bekommen kann. Ebenfalls werden wir sehen dass der Raum L^2 ein Hilbertraum ist (d.h. es existiert ein Skalarprodukt) wohingegen ein L^p Raum für $p \neq 2$ nur ein Banachraum ist (d.h. es existiert nur eine Norm).

Sei $p \in [1, \infty)$ eine reelle Zahl und X eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die folgende Menge von komplexwertigen Fuktionen

$$L^p(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \quad \text{so dass} \quad \int_X |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \right\}. \tag{5}$$

(a) Zeige dass $L^1(X)$ ein Vektorraum ist.

(b) Benutze die Ungleichung

$$(s+t)^p \leq 2^{p-1}(s^p + t^p) \qquad \forall\, s, t \in [0, \infty) \tag{6}$$

um zu zeigen dass $L^p(X)$ ein Vektorraum ist für jedes $p > 1$.

Für $f \in L^p(X)$ und $p \in [1, \infty)$ können wir die sogenannte *p-Norm* definieren als

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Es kann gezeigt werden (freiwillige Zusatzaufgabe) dass (7) eine Norm ist, d.h. sie efüllt die folgenden Eigenschaften

i) $\|kf\|_p = |k|\, \|f\|_p, \quad \forall\, k \in \mathbb{C},$ (absolute Homogenität)

ii) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$ (Dreiecksungleichung)

iii) $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ (fast überall). (Definitheit)

Zusätzlich kann gezeigt werden (ebenfalls freiwillig) dass $L^p(X)$ ausgestattet mit der p-Norm (7) vollständig ist, d.h., es is ein Banachraum. Falls eine Norm in einem Banachraum durch ein Skalarprodukt induziert werden kann, so heisst der Raum *Hilbertraum*.

(c) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeige dass das *Parallelogrammgesetz* gilt, d.h.

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2), \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{H}, \tag{8}$$

wobei die Norm diejenige ist die vom Skalarprodukt induziert wird, d.h. $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

(d) Zeige dass $L^p(X)$ nur ein Hilbertraum sein kann falls $p = 2$.

Hinweis: Zeige durch eine clevere Wahl von f und g dass (8) verletzt ist für $p \neq 2$.

(e) Zeige dass

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(\bar{x}) g(x)\, \mathrm{d}x \tag{9}$$

ein Skalarprodukt in $L^2(X)$ ist und bestimme die Norm welche dadurch induziert wird. Bemerke dass $\bar{f}$ das komplex konjugierte von f bezeichnet.