Übung 1. Eichinvarianz der Stromdichte

Setzt man die Transformation $\tilde{\psi} = \psi e^{(iq/\hbar c)\chi}$ und $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$ in die Definition der Stromdichte ein, findet man sofort

$$\tilde{\boldsymbol{j}} = -\frac{i\hbar}{2m}\Big(\psi^*\nabla\psi + |\psi|^2\frac{iq}{\hbar c}\nabla\chi - \psi\nabla\psi^* - |\psi|^2\frac{-iq}{\hbar c}\nabla\chi\Big) - \frac{q}{mc}(\boldsymbol{A} + \nabla\chi)|\psi|^2 = \boldsymbol{j}. \tag{L.1}$$

Für die zeitabhängige Schrödingergleichung finden wir einerseits (für den zeitabhängigen Teil der Schrödingergleichung)

$$i\hbar\partial_t\tilde{\psi} = \Big[i\hbar(\partial_t\psi) - \frac{q}{c}(\partial_t\chi)\psi\Big]e^{(iq/\hbar c)\chi} \tag{L.2}$$

und andererseits (für den zeitunabhängigen Teil)

$$\Big[\frac{1}{2m}(p - \frac{q}{c}\tilde{\boldsymbol{A}})^2 + q\tilde{\phi}\Big]\tilde{\psi} = \Big\{\Big[\frac{1}{2m}(p - \frac{q}{c}\boldsymbol{A})^2 + q\phi - \frac{q}{c}(\partial_t\chi)\Big]\psi\Big\}e^{(iq/\hbar c)\chi}. \tag{L.3}$$

Im letzten Schritt haben wir genutzt, dass $\tilde{\phi} = \phi - (\partial_t\chi)/c$ und

$$\big[p - (q/c)(\nabla\chi)\big]e^{(iq/\hbar c)\chi} = 0 \quad \text{und somit} \quad \big[p - (q/c)(\nabla\chi)\big]fe^{(iq/\hbar c)\chi} = (pf)e^{(iq/\hbar c)\chi}. \tag{L.4}$$

Wir entnehmen den Gleichungen (L.2) und (L.3) sofort, dass $\tilde{\psi}$ die Schrödingergleichung zu $\tilde{\boldsymbol{A}}$ und $\tilde{\phi}$ erfüllt, falls ψ eine Lösung der Schrödingergleichung zu $\boldsymbol{A}$ und ϕ ist.

Übung 2. Freies Elektron im Magnetfeld: Landau Quantisierung

(a) Zuerst substituieren wir den Ausdruck für das Vektorpotential in den Hamilton Operator und finden

$$H = \frac{1}{2m}\Big(p_x^2 + \Big(p_y + \frac{eB}{c}x\Big)^2\Big). \tag{L.5}$$

Bemerke, dass y nicht in H vorkommt und dass p_y deswegen mit H kommutiert. Eigenfunktionen von p_y sind daher auch Eigenfunktionen von H und wir können deswegen annehmen, dass $\psi(x,y) = \chi(x)e^{ik_y y}$. Für $\chi(x)$ erhalten wir noch die folgende Diff. Gleichung

$$H\chi(x) = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{m}{2}\Big(\frac{eB}{mc}\Big)^2\Big(x + \frac{p_y c}{eB}\Big)^2\Big)\chi(x) = E\chi(x). \tag{L.6}$$

Dies ist genau der Fall des harmonischen Oszillators mit Frequenz $\omega_c = eB/mc$ (Zyklotronfrequenz) verschoben vom Ursprung um $p_y c/eB = k_y\ell^2$ ($p_y = \hbar k_y$). Das Spektrum ist deswegen jenes des harmonischen Oszillators: $E_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)$. Sei $\chi_n(x)$ also eine normalisierte Eigenfunktion des harmonischen Oszillators (die expliziete Form von $\chi_n(x)$ ist nicht wichtig für den Rest dieser Lösung), so ist die totale Lösung

$$\psi_{n,k_y}(x,y) = e^{ik_y y}\chi_n(x + k_y\ell^2). \tag{L.7}$$

Beachte noch, dass die Eigenwerte E_n *nicht* von k_y abhängig sind und daher ist die Entartung genau so gross wie es verschiedene erlaubte k_y-Werte gibt.

(b) Die Frage der Entartung N_n lässt sich einfach beantworten, da wir uns aus a) wissen, dass sie genau der Anzahl erlaubter k_y-Werte entspricht. Für ein System der Länge L_y, sind die zugehörigen k-Werte quantisiert mit $k_y = 2\pi m/L_y$, wobei $m \in \mathbb{Z}$. Da das System aber auch in x-Richtung endlich ist, gilt zudem, dass die Wellenfunktionen zu k_y bei x um $x_0 = -k_y\ell^2$ lokalisiert ist. Mit der Bedingung $-L_x/2 < x_0 < L_x/2$ folgt daraus, $|k_y| \le L_x/2\ell^2$ und somit sind nur $n_{\max} = N_n = L_xL_y/2\pi\ell^2$ Zustände erlaubt. Der magnetische Fluss durch das System ist $\Phi = L_xL_yB = N_\phi\Phi_0$, mit dem Flussquantum $\Phi_0 = hc/e$. Wir finden dann sofort $N_n = \Phi/\Phi_0 = N_\phi$, d.h. den Entartung des Landauniveaus ist genau so gross wie die Anzahl Flussquanten die das System durchdringen.

(c) In diesem Fall ist der Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + \left(p_y + \frac{eB}{c}x\right)^2\right) + eEx, \tag{L.8}$$

und hängt immer noch nicht von y ab. Für $\chi(x)$ finden wir jetzt die Differentialgleichung

$$H\chi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{m}{2}\omega_c^2(x + k_y\ell^2 + \frac{eE}{m\omega_c^2})^2 - p_y\frac{Ec}{B} - \frac{m}{2}\frac{E^2c^2}{B^2}\right)\chi(x) = E\chi(x). \tag{L.9}$$

Dies ist wiederum die Differentialgleichung eines verschobenes harmonischen Oszillators. Allerdings kommt es nun zu einer Aufspaltung der Energieeigenwerte, da E_n von p_y abhängt

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) - p_y\frac{Ec}{B} - \frac{m}{2}\frac{E^2c^2}{B^2}. \tag{L.10}$$

(d) Wir berechnen zuerst den Ausdruck für die Stromdichte aus Gl. (1) auf dem Übungsblatt mit $q = -e$

$$j_y = \frac{1}{L_y}\left(\frac{eB}{mc}x + \frac{\hbar k_y}{m}\right)|\chi(x + k_y\ell^2 + \frac{eE}{m\omega_c^2})|^2, \tag{L.11}$$

wobei wir als Wellenfunktion $\psi_{n,k_y}(x,y) = (1/\sqrt{L_y})e^{ik_yy}\chi_n(x+k_y\ell^2+\frac{eE}{m\omega_c^2})$ benutzt haben, und die Form von χ_n unwichtig ist da sie nicht von y abhängt. Der totale Strom I_y lässt sich dann wie folgt schreiben

$$\begin{aligned}
I_y &= -\frac{e\omega_c}{L_y}\int_{-\infty}^{\infty} dx|\chi_n(x + k_y\ell^2 + \frac{eE}{m\omega_c^2})|^2\left(x + \frac{\hbar k_y}{m\omega_c}\right) && \text{(L.12)}\\
&= -\frac{e\omega_c}{L_y}\int_{-\infty}^{\infty} dx|\chi_n(x + k_y\ell^2 + \frac{eE}{m\omega_c^2})|^2\left(x + k_y\ell^2\right) && \text{(L.13)}\\
&= -\frac{e\omega_c}{L_y}\int_{-\infty}^{\infty} dX|\chi_n(X)|^2\left(X - \frac{eE}{m\omega_c^2}\right), && \text{(L.14)}
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $X = x + k_y\ell^2 + eE/m\omega_c^2$ substituiert haben. Da $|\chi(X)|^2$ eine symmetrische Funktion ist, ist $|\chi(X)|^2X$ antisymmetrisch und integriert sich zu 0. Der zweite Term ergibt $-eE/m\omega_c^2L_y$ weil $\chi(X)$ normalisiert ist, und finden also $I_y = e^2E/m\omega_cL_y$. Die Driftgeschwindigkeit v der Elektronen lässt sich im klassischen Hall-Effekt ermitteln aus $I_y = \rho v$. Mit der Ladungsdichte $\rho = -e/L_y$ ist $v = -Ec/B = -eE/m\omega_c$ und wir finden das klassische Resultat wieder. Die Strom*dichte* eines gefüllten Landauniveaus lässt sich nun schreiben als

$$J_n = \frac{I_y}{L_x}N_n = \frac{e^2E}{m\omega_cL_xL_y}\frac{L_xL_yB}{2\pi\ell^2} = \frac{e^2EB}{2\pi m\omega_c\ell^2} = \frac{e^2}{h}E, \tag{L.15}$$

so dass $\sigma_{xy}^n = e^2/h$. Damit sehen wir wie die Entartung der Landauniveaus zur Quantisierung der elektrischen Leitfähigkeit führen. Dies ist der bekannte ‘Quanten-Hall Effekt’.

Übung 3. Kohärente Zustände zum harmonischen Oszillator

(a) Wir entwickeln $e^{\alpha a^\dagger}$ und benutzen $\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = |n\rangle$, um zu schreiben:

$$a|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty} a\frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!}|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}a|n\rangle \tag{L.16}$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n-1\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{m+1}}{\sqrt{(m+1)!}}\sqrt{m+1}|m\rangle \tag{L.17}$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2}\alpha\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{L.18}$$

(b) Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\langle m|\int\frac{dxdy}{\pi}|z\rangle\langle z|n\rangle = \delta_{m,n}. \tag{L.19}$$

Also berechnen wir

$$\langle m|\int\frac{dxdy}{\pi}|z\rangle\langle z|n\rangle = \int\frac{dxdy}{\pi}e^{-|z|^2}\frac{z^m}{\sqrt{m!}}\frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} = \int_0^\infty dr\int_0^{2\pi}d\phi\, r\, e^{-r^2}\frac{r^{m+n}}{\sqrt{m!n!}}e^{im\phi}e^{-in\phi} \tag{L.20}$$

$$= 2\delta_{m,n}\int_0^\infty dr\, r\, e^{-r^2}\frac{r^{2n}}{n!} = \delta_{m,n}\int_0^\infty dt\, e^{-t}\frac{t^n}{n!} = \delta_{m,n}, \tag{L.21}$$

wobei wir im dritten Schritt das Integral über ϕ ausgewertet haben. Für den letzten Schritt substituieren wir $t = r^2$, und benutzten wir die Definition der Gamma funktion $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}dt$. Nun berechnen wir noch $\langle n\rangle$ und $\langle n^2\rangle$

$$\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \tag{L.22}$$

und

$$\langle\alpha|(a^\dagger a)^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|(a^\dagger a^\dagger aa + a^\dagger a)|\alpha\rangle = |\alpha|^2 + |\alpha|^4. \tag{L.23}$$

Somit finden wir $(\Delta n)^2 = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = |\alpha|^2$. Also ist $\langle n\rangle = (\Delta n)^2$, eine Eigenschaft die kohärente Zustande mit einer Poission-Statistik gemeinsam haben.

(c) Wir führen den dimensionslosen Positionsoperator $\tilde{x}$ und Impulsoperator $\tilde{p}$ ein, mit $\tilde{x} = \sqrt{m\omega/\hbar}\, x$ und $\tilde{p} = p/\sqrt{m\omega\hbar}$. Diese Operatoren lassen sich wie folgt in a und $a^\dagger$ ausdrücken

$$\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad \tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger), \tag{L.24}$$

wobei gilt das $[a, a^\dagger] = 1$. Somit finden wir

$$\langle\alpha|\tilde{x}|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*) \qquad \langle\alpha|\tilde{x}^2|\alpha\rangle = \frac{1}{2}(\alpha^2 + (\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 + 1) \tag{L.25}$$

$$\langle\alpha|\tilde{p}|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\alpha - \alpha^*) \qquad \langle\alpha|\tilde{p}^2|\alpha\rangle = -\frac{1}{2}(\alpha^2 + (\alpha^*)^2 - 2|\alpha|^2 - 1). \tag{L.26}$$

Wir finden dann, dass $(\Delta\tilde{x})^2 = (\Delta\tilde{p})^2 = 1/2$, woraus folgt, dass $(\Delta x)^2 = \hbar/2m\omega$ und $(\Delta p)^2 = m\hbar\omega/2$, so dass $\Delta x\Delta p = \hbar/2$.

(d)

$$\psi(x) = e^{ip_0x/\hbar}\langle x|e^{-ix_0\hat{p}/\hbar}|0\rangle = e^{ip_0x/\hbar}\langle x-x_0|0\rangle = e^{ip_0x/\hbar}\psi_0(x-x_0), \tag{L.27}$$

wobei wir gebraucht haben, dass $\langle x|e^{ix_0\hat{p}/\hbar} = \langle x-x_0|$ (via Impulsdarstellung) und $\psi_0(x)$ der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist (Gaussian). Wir finden also:

$$\langle x_0,p_0|\hat{x}|x_0,p_0\rangle = \int dx|\psi_0(x-x_0)|^2x = \int dx|\psi_0(x)|^2(x+x_0) = x_0 \tag{L.28}$$

$$\langle x_0,p_0|\hat{p}|x_0,p_0\rangle = \int dx\psi_0^*(x-x_0)e^{-ip_0x/\hbar}(-i\hbar\partial_x)\left(\psi_0(x-x_0)e^{ip_0q/\hbar}\right) = p_0. \tag{L.29}$$

Der Zustand $|x_0,p_0\rangle$ ist also der Grundzustand eines Harmonischen Oszillators am Ort x_0 mit Impuls p_0. Wir lassen jetzt $\alpha = \frac{1}{2}(\tilde{x}_0 + i\tilde{p}_0)$, wobei $\tilde{x}_0$ und $\tilde{p}_0$ so definiert sind wie in Teilaufgabe (c). Dann schreiben wir:

$$|x_0,p_0\rangle = e^{i\tilde{p}_0\tilde{x}}e^{-i\tilde{x}_0\tilde{p}}|0\rangle = e^{i(\tilde{p}_0\tilde{x}-\tilde{x}_0\tilde{p})}e^{\frac{i}{2}\tilde{x}_0\tilde{p}_0}|0\rangle = e^{\frac{i}{2}\tilde{x}_0\tilde{p}_0}e^{\alpha a^\dagger-\alpha^* a}|0\rangle \tag{L.30}$$

$$= e^{\frac{i}{2}\tilde{x}_0\tilde{p}_0}e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha a^\dagger}\underbrace{e^{-\alpha^* a}|0\rangle}_{=|0\rangle} = e^{\frac{i}{2}\tilde{x}_0\tilde{p}_0}|\alpha\rangle, \tag{L.31}$$

wobei wir im zweiten und vierten Schritt die Baker-Campbell-Hausdorff Formel aus Übungsserie 4 gebraucht haben.

(e) Wir berechnen die Zeitevolution für einen Zustand $|n\rangle$ wie folgt:

$$e^{-iHt/\hbar}|n\rangle = e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})}|n\rangle = \left(e^{-i\omega t}\right)^n e^{-i\omega t/2}|n\rangle. \tag{L.32}$$

Wir entwickeln $e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$ (siehe Teilaufgabe a) und finden

$$e^{-iHt/\hbar}|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{-iHt/\hbar}\sum_n \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{L.33}$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2}e^{-i\omega t/2}\sum_n \frac{(\alpha e^{i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-\omega t/2}|\alpha(t)\rangle, \tag{L.34}$$

was zu zeigen war. Für $|x_0,p_0\rangle(t)$ finden wir

$$|x_0,p_0\rangle(t) = e^{ip_0x_0/2\hbar}e^{-iHt/\hbar}|\alpha\rangle = e^{ip_0x_0/2\hbar}|\alpha(t)\rangle e^{-i\omega t/2}. \tag{L.35}$$

Für die klassische Bahn gilt:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0\cos\omega t + \tilde{p}_0\sin\omega t, \quad \tilde{p}(t) = \tilde{p}_0\cos\omega t - \tilde{x}_0\sin\omega t, \tag{L.36}$$

und damit

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}_0(t) + i\tilde{p}_0(t)) = \alpha e^{-i\omega t} = \alpha(t), \tag{L.37}$$

das heisst, $|\alpha(t)\rangle = e^{-ix_0(t)p_0(t)/2\hbar}|x_0(t),p_0(t)\rangle$, und

$$|x_0,p_0\rangle(t) = |x_0(t),p_0(t)\rangle e^{i(x_0p_0-x_0(t)p_0(t))/2\hbar}e^{-i\omega t/2}. \tag{L.38}$$

Da $|x_0(t),p_0(t)\rangle$ nichts anderes ist als der Grundzustand in $x_0(t),p_0(t)$, sieht man, dass ein kohärenter Zustand sich hin und her bewegt, ohne seine Form zu verändern. Im Phasenraum (x,p-Ebene) folgt der Zustand also einer klassischen Bahn, die mit einer Gauss-Verteilung ausgeschmiert ist.