Übung 1. Drehimpulsaddition

Lernziel: In der Betrachtung von mehreren Teilchen (oder eines Teilchens mit orbitalem Drehimpuls sowie Spin) spielt der gesamte Drehimpuls eine wichtige Rolle. In dieser Aufgabe üben wir die Drehimpulsaddition von Teilchen und bestimmen den totalen Spin des Systems.

Betrachte ein Elektron mit orbitalem Drehimpuls $l = 1$ und Spin $s = \frac{1}{2}$. Der Drehimpulsoperator des Systems sei $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \boldsymbol{S}$. Wir schreiben kurz $\boldsymbol{L}$ statt $\boldsymbol{L} \otimes \mathbb{I}$ und $\boldsymbol{S}$ statt $\mathbb{I} \otimes \boldsymbol{S}$.

(a) Zeige, dass $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$. Das Tensorprodukt der Darstellungen l und s ist also wieder eine Darstellung der Drehimpuls-Algebra.

(b) Im zusammengesetzten System haben wir eine Eigenbasis $\{|l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle\}$ zu $\boldsymbol{L}^2, L_z, \boldsymbol{S}^2, S_z$, und eine Eigenbasis $|j, m\rangle$ zu $\boldsymbol{J}^2$, J_z. Schreibe die $|j, m\rangle$ als Linearkombination der $|l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle$.

Vorgehen: Bestimme den Zustand $|j, m^+\rangle$ mit der höchsten magnetischen Quantenzahl $m = m^+$. Wende $J_- = J_x - iJ_y$ wiederholt auf diesen Zustand an, um die anderen Eigenzustände mit demselben Spin j zu finden. Wenn eine Potenz von J_- schliesslich den Zustand vernichtet, suche erneut den Zustand mit der höchsten magnetischen Quantenzahl im Komplement der bis dahin erzeugten Zustände, und verwende J_- erneut.

(c) Überprüfe, dass die erhaltenen Clebsch-Gordan-Koeffizienten mit dem Resultat aus der Vorlesung übereinstimmen (Gleichung 11.71):

$$\mathcal{H}_{l+1/2} : \langle l, \frac{1}{2}, m \mp \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} | l, \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}} \tag{1}$$

und

$$\mathcal{H}_{l-1/2} : \langle l, \frac{1}{2}, m \mp \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} | l, \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}, m\rangle = \mp\sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}} \tag{2}$$

Übung 2. Wasserstoff-Atom im Magnetfeld: Aufspaltung des Grundzustandes

Lernziel: Der Spin des Elektrons führt zu einer Entartung der Zustände der Atomschalen. Diese Entartung wird teilweise durch ein äusseres Magnetfeld aufgehoben.

Diskutiere die Entartung des Grundzustandes des Wasserstoffatoms und die Aufspaltung durch ein magnetisches Feld.

Übung 3. Qubits, Spins und angeregte Atomzustände

Lernziel: Qubits bilden das Quantenanalog zum klassischen Bit. Wir lernen hier, wie ein solches Qubit realisiert werden kann.

(a) Welche Eigenschaften sollte ein Qubit besitzen?

(b) Vergleiche ein Qubit mit einem Spin-1/2 Teilchen (z.B. Elektron) sowie einem System bestehend aus einem Grundzustand sowie einem angeregten Zustand eines Atoms.

(c) Wie sehen Qubit-Operationen aus?

Übung 4. Quantenteleportation

Lernziel: Entanglement (Verschränkung) ist eine einzigartige Eigenschaft der Quantenmechanik, welche einerseits fundamental interessant ist, aber auch viele Anwendungen findet. In dieser Aufgabe sehen wir, wie Entanglement zwischen zwei Teilchen für ein Quantenteleportationsprotokoll benutzt werden kann.

Alice besitzt ein Spin-1/2 Teilchen in einem unbekannten Zustand $|\phi_1\rangle$. Sie möchte Bob diesen Zustand senden, darf aber nur klassisch mit Bob kommunizieren, d.h. sie darf Bob nur klassische Bits mitteilen. Wir nehmen nun an, dass Alice und Bob je ein Spin-1/2 Teilchen eines EPR-Paars besitzen, das sie bei einem früheren Treffen ausgetauscht haben.

In dieser Übung wird gezeigt, dass Alice diese "Quantenteleportation" ausführen kann. Historisch wurde dieses Protokoll 1993 von Charles Bennett et al. entdeckt[1]. Diese Übung folgt der Notation dieses Originalpapers.

Der Zustand des EPR-Paars lässt sich in folgender Form schreiben:

$$|\Psi_{23}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow_2}\rangle|{\downarrow_3}\rangle - |{\downarrow_2}\rangle|{\uparrow_3}\rangle\right) \ , \tag{3}$$

wobei "2" und "3" die jeweiligen Teilchen von Alice und Bob indizieren. Der unbekannte Zustand von Alice lässt sich als Linearkombination der Basis $|{\uparrow_1}\rangle$, $|{\downarrow_1}\rangle$ schreiben:

$$|\phi_1\rangle = a\,|{\uparrow_1}\rangle + b\,|{\downarrow_1}\rangle \ , \tag{4}$$

wobei $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Alice misst die Teilchen "1" und "2" (die in ihrem Besitz sind) in der sog. Bellbasis:

$$|\Psi_{12}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow_1}\rangle|{\downarrow_2}\rangle \pm |{\downarrow_1}\rangle|{\uparrow_2}\rangle\right) \ , \quad |\Phi_{12}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow_1}\rangle|{\uparrow_2}\rangle \pm |{\downarrow_1}\rangle|{\downarrow_2}\rangle\right) \ . \tag{5}$$

(a) Schreibe den Zustand $|\psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\Psi_{23}^-\rangle$ des zusammengesetzten Systems in der Bellbasis (5) für die Teilchen "1" und "2" aus. Was sind die Wahrscheinlichkeiten der vier verschiedenen Messresultate? Was ist, für jedes Messresultat, der Zustand nach der Messung? Insbesondere, was ist der Zustand von Bobs Teilchen?

(b) Alice teilt Bob mit, welches Messresultat sie bekommen hat (diese Information wird mit Hilfe von zwei klassischen Bits beschrieben, die sie Bob senden darf). Was kann Bob tun, um den ursprünglichen, Alice unbekannten Zustand $|\phi_1\rangle$ zu rekonstruieren?

[1] Phys. Rev. Lett. **70** 1895 (1993)