Übung 1. Das Optische Theorem

Lernziel: Das optische Theorem ist sehr hilfreich zur Berechnung des totalen Streuquerschnitts. Die Beiträge aus allen Winkeln kann der Streuamplitude bei $\theta = 0$ entnommen werden. Ziel dieser Übung ist sich mit dem optischen Theorem vertraut zu machen.

Beweise und bespreche die physikalische Bedeutung des optischen Theorems

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k}\text{Im}f(0). \tag{1}$$

Übung 2. Streuungstheorie in 2D

Lernziel: Die Streuphysik ist abhängig von der Dimension des Systems. Zur Ergänzung an die Vorlesung wird hier die Streuphysik in 2 Dimensionen vertieft.

In dieser Aufgabe leiten wir die Streutheorie in 2 Dimensionen her. Wir folgen dabei dem Skript (Kap. 6 im Skript für 3D) und passen die Entsprechenden Ausdrücke gegebenenfalls an.

(a) Zeige dass die retardierte Greensche Funktion in 2D gegeben ist durch

$$G(\boldsymbol{r}, E) = -i\frac{m}{2\hbar^2}\mathcal{H}_0^{(1)}(kr), \tag{2}$$

wobei $\mathcal{H}_0^{(1)}$ die erste Hankel Funktion nullter Ordnung ist, und $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.

Hinweis: Die Bessel Funktion erster Gattung $\mathcal{J}_0(x)$ kann wie folgt parametrisiert werden

$$\mathcal{J}_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\phi\; e^{-ix\sin\phi} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_1^{\infty} du\; \frac{\sin(xu)}{\sqrt{u^2-1}}, \quad (x > 0). \tag{3}$$

Nutze auch die Darstellung der ersten Hankel Funktion

$$\mathcal{H}_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{\pi}\int_1^{\infty} du\; \frac{e^{iux}}{\sqrt{u^2-1}}, \qquad (x > 0). \tag{4}$$

(b) Weise nach, dass das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion $\Psi_{\boldsymbol{k}}$ gegeben ist durch

$$\Psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \;\sim\; e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + f_k(\varphi)\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}, \tag{5}$$

und bestimme die Streuungsamplitude $f_k(\varphi)$. Siehe auch Gln (6.12) und (6.13) im Skript.

Hinweis: Nutze das asymptotische Verhalten der Hankelfunktionen

$$\mathcal{H}_l^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x-\pi/4-l\pi/2)}, \qquad \mathcal{H}_l^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i(x-\pi/4-l\pi/2)}. \tag{6}$$

Im Folgenden betrachten wir nun ein Rotationssymmetrisches Potential $V(\boldsymbol{r}) = V(r)$.

(c) Die Streuzustände können analog zu Gl. (6.33) in Partialwellen zerlegt werden als

$$\Psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\varphi}R_l(r). \tag{7}$$

Bestimme mit diesem Ansatz die radiale Wellengleichung und löse diese für $V \equiv 0$.

(d) Zeige dass sich die radiale Wellenfunktion für $V \neq 0$ asymptotisch verhält wie

$$R_l(r) = \alpha_l \left[\mathcal{H}_l^{(2)}(kr) + e^{2i\delta_l} \mathcal{H}_l^{(1)}(kr) \right]. \tag{8}$$

Wie verhaltet sich die totale Wellenfunktion $\Psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ im asymptotischen Limes? Nutze dazu die Zerlegung der Ebenen Welle in Polardarstellung

$$e^{i\boldsymbol{kr}} = e^{ikr\cos\varphi} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_l(kr) e^{il\pi/2} e^{il\varphi} = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{H}_l^{(1)}(kr) + \mathcal{H}_l^{(2)}(kr) \right] e^{il\pi/2} e^{il\varphi} \tag{9}$$

(e) * Weise nach dass der totale Streuungsquerschnitt gegeben ist durch

$$\sigma = \frac{4}{k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sin^2(\delta_l), \tag{10}$$

und leite das optische Theorem in 2D her.

Übung 3. Dekohärenz eines Qubits

Lernziel: Reine quantenmechanische Systeme haben keine intrinsische Dekohärenz. Diese wird oft phenomenologisch eingeführt indem das System an eine Umgebung (Bad) gekoppelt wird. Eine Mittelung über die Zustände des Bades führt dann zu einer effektiven (und dekohärenten) Beschreibung des ursprünglichen Systems.

Wir betrachten ein System mit nur zwei verschiedenen Zuständen, die wir als $|0\rangle$ und $|1\rangle$ notieren. So ein *Zwei-Niveau* System wird auch *Qubit* genannt.

(a) Bestimme die Dichte-Matrix für einen reinen Qubit-Zustand $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, und für eine statistische Mischung der zwei möglichen Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$, mit Wahrscheinlichkeiten $|\alpha|^2$ und $|\beta|^2$. Berechne die Spur $\mathrm{Tr}\rho$ und $\mathrm{Tr}\rho^2$ für beide Fälle.

(b) Ein Qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta e^{i\phi}|1\rangle$ sei in einem reinen Zustand präpartiert und wechselwikre mit einem Ensemble von vielen anderen Qubits $|\psi^i_{\mathrm{bath}}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta e^{i\phi_i}|1\rangle$, die sich in der Umgebung unseres Qubit befinden. Die Qubits in dem Ensemble haben eine Verteilung $P(\phi, t)$ der Phasen ϕ, die gegeben ist durch:

$$P(\phi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} e^{-\phi^2/2\sigma^2(t)}, \tag{11}$$

wobei $\sigma(t) = \sqrt{2t/\tau}$. Durch Wechselwirkung mit dem Bad folgt das Qubit der *ausintegrierten* Dynamik des Ensembles via

$$\rho(t) = \int d\phi P(\phi, t)\rho(\phi). \tag{12}$$

Berechne diese Dynamik explizit wobei τ als Zeitkonstante aufzufassen ist.

(c) Ermittle zum Schluss noch die Entropie $S(t) = -\mathrm{Tr}\rho(t)\ln\rho(t)$, und werte sie aus für den Fall $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. Wie verhält sich $S(t)$ bei $t = 0$ und $t \to \infty$?