Übung 1. Zeitumkehr und Parität in der Streumatrix

Lernziel: Bei Streuexperimenten äussern sich gewisse Symmetrien durch eine besondere Struktur der S-Matrix. Es wird hier die Zeitumkehr und Paritätstransformation betrachtet.

Die Streumatrix verbindet die einfallenden mit den auslaufenden Amplituden via

$$\Psi_{\text{out}} = \begin{pmatrix} b \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ B \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ B \end{pmatrix} = S\, \Psi_{\text{in}}. \tag{1}$$

(a) Zeige, dass die Beziehung $t = t'$ gilt, falls das Streuexperiment zeitumkehrinvariant ist.

Hinweis: Zeige zuerst, dass für zeitumkehrinvariante Systeme mit $\psi(x,t)$ sogleich auch $\psi^*(x,t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung ist.

(b) Zeige, dass für ein symmetrisches Streupotential (Parität) die Beziehung $r = r'$ gilt.

(c) Diagonalisiere schlussendlich die Streumatrix S eines zeitumkehr- und paritätsinvarianten Systems.

Übung 2. Heisenbergsche Unschärferelation für allgemeine Observablen.

Lernziel: Die bekannte Heisenbergsche Unschärferelation betrifft die spezifischen Observablen x und p. Wir beweisen eine allgemeinere Form der Unschärferelation, die für ein beliebiges Paar von Observablen gilt.

Seien A und B zwei Observablen. Die Standardabweichung der Observable A (bzw. B) bezüglich ein Zustand $|\psi\rangle$ ist gegeben durch $\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle}$. Zeige die allgemeine Unschärferelation

$$\Delta A \cdot \Delta B \geqslant \frac{1}{2} |\langle i\,[A,B]\,\rangle|. \tag{2}$$

Hinweise: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für zwei Zustände $|\phi\rangle$ und $|\chi\rangle$ lautet

$$|\langle \phi|\chi\rangle|^2 \leqslant \langle\phi|\phi\rangle\langle\chi|\chi\rangle. \tag{3}$$

Zeige die Relation (2) zuerst für Observablen A und B deren Erwartungswerte verschwinden, d.h. $\langle A\rangle = \langle B\rangle = 0$. Leite nun die allgemeine Beziehung aus diesem Spezialfall her.

Übung 3. Teilchen im Doppeltopf

Lernziel: Wir untersuchen an einem einfachen Beispiel, wie entartete Energiezustände (hier zwei) zu nicht-entarteten Zuständen aufspalten können. Dieses sogenannte 'Splitting' tritt ein, wenn verschiedene Wellenfunktionen (Zustände) zur gleichen Energie miteinander hybridisieren und neue Zustände ('bonding' und 'anti-bonding') erzeugen.

Wir betrachten ein Teilchen in folgendem Potential

$$V(x) = \begin{cases} V, & |x| < w/2 \\ 0, & w/2 < |x| < W/2 \\ \infty, & |x| > W/2. \end{cases} \tag{4}$$

Bemerke, dass die Zustände auf dem endlichen Bereich $|x| < W/2$ lokalisiert sind und die Wellenfunktionen an den Grenzen $x = \pm W/2$ verschwinden müssen.

(a) Finde die transzendenten Gleichungen welche die Energiezustände für $E < V$ liefern. Gehe dazu wie folgt vor. Beginne mit dem Ansatz

$$\psi_l(x) = a e^{ik(x+w/2)} + b e^{-ik(x+w/2)} \qquad \text{für} \qquad -W/2 < x < -w/2. \tag{5}$$

$$\psi_r(x) = A e^{ik(x-w/2)} + B e^{-ik(x-w/2)} \qquad \text{für} \qquad w/2 < x < W/2 \tag{6}$$

der Wellenfunktion in der linken und rechten Hälfte des Topfes. Bestimme dann die Transfermatrix (siehe auch Vorlesungsskript Abschnitt 3.4), welche die Amplituden links und rechts verbindet, d.h.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Ermittle dann aus den Bedingungen $\psi_l(-W/2) = \psi_r(W/2) = 0$ und Gl. (7) die gewünschten Bestimmungsgleichungen.

(b) $V = \infty$:

Löse die Gleichungen für den Grenzwert $V \to \infty$. Zeige, dass die erlaubten Energien mit denjenigen eines einzelnen Topfes mit Breite $(W - w)/2$ und unendlicher Tiefe übereinstimmen. Begründe, warum jeder Energieeigenwert zweifach entartet ist und bestimme die zugehörigen Wellenfunktionen.

$V < \infty$:

Betrachte nun eine endliche Potentialstufe, $V < \infty$ und zeige, dass sich (ehemals entartete) Energiezustände bei $E \ll V$ aufteilen und die Entartung aufheben. Schätze die Energieverschiebung mithilfe eines perturbativen Ansatzes ab.

(c) Analog zu Teil (a), leite die transzendenten Gleichungen für den Fall $E > V$ her.

(d) $V = 0$:

Löse nun diese Gleichungen für den Grenzwert $V \to 0$. Zeige, dass die erlaubten Energien mit denjenigen eines einzelnen Topfes mit Breite W und unendlicher Tiefe übereinstimmen. Sind die Energieeigenwerte entartet?

$V > 0$:

Schätze nun ab, wie sich die Energienieveaus verschieben, wenn $0 < V \ll E$.

(e*) Löse die transzendenten Gleichungen (sowohl für $E < V$ als auch $E > V$) numerisch für ein vorgegebenes V. Stelle das Energiespektrum $\{E_n(V)\}$ als Funktion von V dar.

Hinweis: Führe die dimensionslosen Grössen $\beta = w/W$, $e = E/E_0$ und $v = V/E_0$ ein und drücke die Gleichungen in diesen Grössen aus. Hier wurde zudem die Energieskala $E_0 = \hbar^2\pi^2/2mW^2$ eingeführt.