Übung 1. Delta-"Funktion"

Lernziel: Die von Dirac eingeführte Delta-Funktion ist ein extrem wichtiges Hilfsmittel der theoretischen Physik. Sie kann insbesondere dazu benutzt werden, Fourierformeln einfach zu beweisen. In dieser Übung sollen verschiedene Eigenschaften der Delta-Funktion (Skript 2.10) gezeigt, und gleichzeitig deren Umgang geübt werden. Die Delta-Funktion hat verschiedene Darstellungsmöglichkeiten, deren zwei weiterhin explizit nachgewiesen werden sollen.

Die Delta Funktion $\delta(x)$ besitzt folgende definierende Eigenschaft $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x) = f(0)$, wobei $f(x)$ eine hinreichend glatte Funktion sein soll.

(a) *Funktion als Argument einer Delta-Funktion.* Zeige:

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial f(x_i)}{\partial x}\right|^{-1} \delta(x - x_i)\,, \tag{1}$$

wobei $f(x)$ eine Funktion mit nur einfachen Nullstellen x_i, $i = 1, \ldots, N$, d.h. $f(x_i) = 0$ und $\partial f(x_i)/\partial x \neq 0$, sei. Was geht schief, wenn $f(x)$ eine mehrfache Nullstelle besitzt? Zeige, dass das Skalierungsverhalten $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ für $a \neq 0$ und reell folgt.

(b) *Darstellung der Delta-Funktion.* Zeige, dass $\delta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\sin(\epsilon x)/\pi x$ und auch $\delta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}$ Darstellungen der Delta-Funktion sind. Werte dazu in der hinreichenden Bedingung

$$\delta_\epsilon(x) = \delta(x) \Leftrightarrow \int_{-a}^{a} dx\,\delta_\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon\to 0} 1 \quad \forall a,\ 0 < a \leq \infty \tag{2}$$

die Integrale in der komplexen Ebene, d.h. unter Verwendung des Residuensatzes, aus.

(c) *Fouriertransformierte der Delta-Funktion.*

i Berechne

$$\hat{\delta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x)\,e^{-ikx} \tag{3}$$

ii Zeige explizit, dass sich per Fourierinversion die sehr wichtige Integraldarstellung der Delta-Funktion ergibt

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,e^{ikx} \tag{4}$$

Beweise diese Formel dabei durch direkte Integration. Um das Integral konvergent zu machen, nehme $x \to x + i\epsilon$ für $k > 0$ und $x \to x - i\epsilon$ für $k < 0$, wobei $\epsilon > 0$ und Betrachte nach Auswertung des Integrals $\epsilon \to 0$.

Übung 2. Entartete und nicht-entartete Operatoren

Lernziel: In dieser Übung soll die Existenz von vollständigen Orthonormalsystemen für kommutierende Operatoren gezeigt werden.

Es seien A und B zwei Observablen. Nun sei $A\Psi_n = a\Psi_n$ mit $n = 1\ldots k$ ein k-fach entarteter Eigenraum von A. Zeige, dass gemeinsame Eigenfunktionen $\Psi_{m,n}$ von A und B genau dann existieren, wenn $[A, B] = 0$.

Übung 3. Vollständige Orthogonalsysteme

Lernziel: In dieser Aufgabe lernen wir den Umgang mit verschiedenen Normierungen für endliche und unendlich ausgedehnte Systeme.

(a) Betrachte ein endliches System der Länge $L = Na$ mit diskreten Gitterpunkten $x_n = na$ mit $n \in \{0, \dots, N\}$ und periodischen Randbedingungen $\psi(x_N) = \psi(x_0)$. Zeige, dass die Funktionen $\psi_m(x_n) = e^{ik_m x_n}/\sqrt{N}$ mit $k_m = 2\pi m/(Na)$ und $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem darstellen. Begründe wieso die erlaubten k-Werte diskret sind und nur eine endliche Anzahl erlaubt ist.

(b) Wir untersuchen nun den Grenzwert $a \to 0$ für obiges System der Länge L mit L konstant, sodass kontinuierliche Positionen $x \in [0, L)$ möglich sind. Welche k-Werte sind für die Randbedingungen $\psi(L) = \psi(0)$ erlaubt? Bestimme ein vollständiges Orthonormalsystem. Die Poisson-Formel $\sum\limits_m e^{2\pi i x m} = \sum\limits_n \delta(x+n)$ kann ohne Beweis verwendet werden.

(c) Betrachte nun ein unendlich ausgedehntes System mit diskreten Gitterpunkten $x_n = na$ wie in (a) allerdings mit $n \in \mathbb{Z}$. Welche k-Werte sind nun erlaubt? Bestimme eine vollständige Basis für dieses System. Finde eine geeignete Normierung der Basis.

(d) Bestimme nun ein vollständiges Orthonormalsystem für ein unendlich ausgedehntes System mit kontinuierlicher Position $x \in \mathbb{R}$.

Übung 4. Teilchen im Topf

Lernziel: Ziel dieser Aufgabe ist ein tieferes Verständnis der gebundenen Zustände eines Teilchens in einem quantenmechanischen Potentialtopf. Insbesondere sehen wir die Verknüpfungen und Unterschiede zum unendlich tiefen Potentialtopf.

Wir betrachten in dieser Aufgabe einen Potentialtopf mit Potentialtiefe V und Breite w beschrieben durch $V(x) = V\Theta(|x| - w/2)$ (siehe Kapitel 3.3 im Skript).

(a) Benutze die folgenden Ansätze, um die transzendenten Gleichungen für die Energien E_n der gebundenen Zustände zu bestimmen:

$$\psi^{(+)}(x) = \begin{cases} be^{\alpha(x+w/2)}, & x < -w/2, \\ c\cos(lx), & -w/2 < x < w/2, \\ Ae^{-\alpha(x-w/2)}, & w/2 < x, \end{cases} \tag{5}$$

$$\psi^{(-)}(x) = \begin{cases} be^{\alpha(x+w/2)}, & x < -w/2, \\ c\sin(lx), & -w/2 < x < w/2, \\ Ae^{-\alpha(x-w/2)}, & w/2 < x. \end{cases} \tag{6}$$

Wie unterscheiden sich die Spektren für endliche Tiefe V und unendliche Tiefe $V \to \infty$?

(b) Zeige, dass die Energien der gebundenen Zustände E_n für $V \to \infty$ in die bekannten Lösungen E_n^∞ für den unendlich tiefen Topf übergehen. Bestimme die Abweichungen der Energien $\delta E_n = E_n - E_n^\infty$ vom unendlichen Topf für tiefe gebundene Zustände.

(c) Gibt es für einen Potentialtopf mit infinitesimaler Tiefe V_ϵ einen gebundenen Zustand? Falls ja, berechne seine Bindungsenergie und vergleiche mit dem gebundenen Zustand eines attraktiven Delta-Potentials.