Übung 1. Klassische Wirkung

Lernziel: In dieser Übung soll die klassische Wirkung verschiedener physikalischer Systeme repetiert werden. Die klassischen Bewegungsgleichungen ergeben sich aus der Minimierung der Wirkung. In der Quantenmechanik kann die Wirkung nur halbzahlige Vielfache des Planckschen Wirkungsquantums annehmen.

In der klassischen Mechanik ist die Wirkung S definiert durch

$$S[q(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt. \tag{1}$$

Die Wirkung hängt von der Bahn, beginnend zum Zeitpunkt t_a am Punkt q_a und endend am Punkt q_b zum Zeitpunkt t_b, ab. Die klassische Bahn minimiert die Wirkung.

(a) Berechne die Wirkung entlang der klassischen Bahn für folgende Systeme:

(i) Freies Teilchen: $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = m\dot{q}^2/2$

(ii) Harmonischer Oszillator: $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = m\dot{q}^2/2 - m\omega^2 q^2/2$

(iii) Konstantes Kraftfeld: $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = m\dot{q}^2/2 - Fq$

Benutze als Anfangsbedingung für die obigen Fälle $t_a = 0$ und $q_a = 0$.

(b) Für klassische Bahnen mit festgehaltenem Anfangspunkt $q(t_a) = q_a$ kann man S auffassen als Funktion von $S(q_b, t_b)$. Zeige nun, dass sich, aus der Variation des Endpunktes $q_b \to \bar{q}_b = q_b + \delta q_b$ (bei festgehaltenem t_b), folgende Beziehung ergibt,

$$\frac{\partial S}{\partial q_b} = p_b \tag{2}$$

wobei $p_b = p(t_b)$ der konjugierte Impuls zu q zur Endzeit darstellt. Zeige weiter, dass gilt

$$\frac{\partial S}{\partial t_b} = -H(q_b, p_b, t_b), \tag{3}$$

wenn die Endzeit variiert $t_b \to \bar{t}_b = t_b + \delta t_b$, aber der Endpunkt $\bar{q}(\bar{t}_b) = q(t_b)$ festgehalten wird. Nutze dabei, dass $\bar{q}(t_b) = q(t_b) - \dot{q}(t_b)\delta t_b$ zu tiefster Ordnung gilt.

Übung 2. Gaußsche Integrale

Lernziel: In dieser Übung soll die Klasse der gaußschen Integrale untersucht werden. Diese Integrale tauchen sowohl in Anwendungen als auch in formalen Überlegungen der Quantenmechanik häufig auf. In der Statistik sind sie als gaußsche Fehlerintegral bekannt.

(a) Zeige:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{4}$$

Hinweis: Integriere zunächst die Funktion $e^{-a(x^2+y^2)}$ über den gesamten $\mathbb{R}^2$, sowohl in Polar- als auch in kartesischen Koordinaten.

(b) Berechne das verallgemeinerte Gauß Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2+bx+c} \tag{5}$$

(c) Die Übergangsamplitude eines freies Teilchens, das von einem Punkt $a := (x_a, t_a)$ zu einem Punkt $b := (x_b, t_b)$ propagiert, hat die Form

$$K(b,a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t_{ba}}} \exp\left(\frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar t_{ba}}\right), \tag{6}$$

wobei $t_{ba} = t_b - t_a$.

Überzeuge dich unter Verwendung dieser Amplitude, dass die Beziehung [siehe auch Gl. (1.27) im Vorlesungsskript]

$$K(b,a) = \int dx_c\, K(b,c)K(c,a), \tag{7}$$

unabhängig von der Zeit t_c gültig ist.

Übung 3. Bohr-Sommerfeld Quantisierung (1915)

Lernziel: In dieser Übung wird die Bohr-Sommerfeld Quantisierung durch Anwendung auf den harmonischen Oszillator veranschaulicht.

In der Bohr-Sommerfeld Quantentheorie gelten die Regeln der klassischen Mechanik, wobei nur solche Teilchenbahnen erlaubt sind, für die gilt[1]

$$J(E) = \oint_{H(\mathbf{p},\mathbf{q})=E} \mathbf{p}\; d\mathbf{q} = (n+\alpha)h. \tag{9}$$

Das Integral ist dabei über eine geschlossene Bahn im Phasenraum $\{p, q\}$ auszuwerten.

(a) Betrachte den eindimensionalen harmonischen Oszillator,

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \tag{10}$$

und wende die Bohr-Sommerfeld Quantisierungsregeln auf dieses System an. Berechne Energie, Periode und Amplitude (Auslenkung) der quantisierten Bahnen.

Hinweis: Der Phasenraum ist eine Ellipse.

(b) Die Korrektur α entsteht durch zusätzliche Phasenverschiebungen (Reflexionsamplitude $r = |r|e^{2i\varphi}$) welche ein Teilchen durch Reflexion an den Potentialwänden erfährt.

Ausgehend vom Spektrum des harmonischen Oszillators, bestimme den Wert von α für diesen Fall und ermittle die resultierende Phase φ. Bestimme dann die Phasenverschiebung einer freien Welle durch Streuung an einer unendlich hohen Potentialwand.

[1] Diese Bohr-Sommerfeld Quantisierungsbedingung $J(E) = nh$ lässt sich folgendermaßen motivieren; die klassisch erlaubte Bewegung wird so eingeschränkt, dass die Bahn einer Periode einem ganzzahligen Vielfachen der jeweiligen de Broglie Wellenlänge entspricht, d.h.

$$n = \oint \frac{dq}{\lambda} = \oint \frac{dq}{h/p} = \frac{1}{h}\oint p\; dq \tag{8}$$