Übung 1. Plancksches Strahlungsgesetz[1] (1900): Teil 1

Lernziel: Die mittlere Energie (thermische Mittelung) einer Mode hängt entscheidend davon ab, ob die Energiezustände kontinuierlich oder diskret sind. Dies wollen wir hier verstehen.

Betrachte eine einzelne Mode (oder ein System mit einem Freiheitsgrad), das Zustände mit Energien $E \in [0, \infty[$ annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System bei der Temperatur T im Zustand mit Energie E befindet ist durch den Bolzmann-Faktor $e^{-\beta E}$ gegeben (wobei $\beta = 1/k_B T$).

(a) Berechne den thermischen Energie-Erwartungswert für die Mode

$$\langle E \rangle_{\text{klass.}} = \frac{\int_0^\infty dE\ E\, e^{-\beta E}}{\int_0^\infty dE\ e^{-\beta E}}. \tag{1}$$

(b) Basierend auf das Experiment zum Photoeffekt (1905) postulierte Einstein[2], dass die Energie der elektormagnetischen Strahlung nur quantisiert auftreten kann, mit $E_n = n\hbar\omega$. Modifiziere deshalb obiges System dahingehend und bestimme die Änderung des Energie-Erwartungswerts

$$\langle E \rangle_{\text{quant.}} = \frac{\sum_{n=0}^\infty E_n\, e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-\beta E_n}}. \tag{2}$$

(c) Diskutiere die Grenzfälle hoher ($kT \gg \hbar\omega$) und tiefer ($kT \ll \hbar\omega$) Temperaturen.

Übung 2. Plancksches Strahlungsgesetz (1900): Teil 2

Lernziel: In der Geburtsstunde der Quantenmechanik gelang es Max Planck 1900 eine Vorhersage für die Energiedichte von thermischer elektro-magnetischer Strahlung zu machen. Wir wollen diesen physikalischen Meilenstein im Folgenden nachvollziehen. Wir zeigen wie Planck's Annahme eines diskreten Energiespektrums der elektromagnetischen Strahlung die Ultraviolettkathastrophe verhindert.

Wir betrachten einen kubischen Hohlraum mit Kantenlänge L in dessen Inneren sich ein Strahlungsfeld im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T befindet.

(a) Unter Annahme der Bedingungen $E_\parallel = 0$ am Rand des Hohlraumes, bestimme die erlaubten Werte $\boldsymbol{k_n}$ des Wellenvektors für Moden im Inneren des Körpers. Berechne das Volumen pro Mode im Impulsraum. Mit Hilfe der linearen *Dispersionsrelation* $\omega = c|\boldsymbol{k}|$ ermittle die Modendichte im Frequenzintervall $[\omega, \omega + d\omega]$. Berücksichtige dabei, dass es zu jedem Wellenvektor zwei orthogonale Polarisationen (Moden) gibt.

[1] M. Planck, *Verhandlungen der Deutschen physikalischen Gesellschaft* **2**, 237-245 (1900) Die Literaturverweise sind einsehbar unter `www.itp.phys.ethz.ch/education/hs14/QMI/`.
[2] A. Einstein, *Annalen der Physik* **322**, 132-148 (1905)

(b) Fasse nun die Energie pro Mode im Sinne von Aufgabe 1 auf und berechne die spektrale Energiedichte $u(\omega, T)$ im makroskopischen Limes $L \gg \lambda$, für den klassischen [Rayleigh-Jeans, siehe Gl. (1)] und den quantentisierten Fall [Planck, siehe Gl. (2)].

(c) Werte nun (für beide Fälle) die gesamte Energiedichte

$$\frac{U}{L^3} = \int_0^\infty d\omega \;\; u(\omega, T) \tag{3}$$

der Hohlraumstrahlung aus und bestimme die Temperaturabhängigkeit.

Hinweis: Für die T-Abhängigkeit ist die explizite Berechnung des Integrals nicht erforderlich. Diese Zusatzaufgabe kann jedoch als Herausforderung angesehen werden:

(d) * Zeige zuerst, dass sich die Berechnung des Integrals $\int_0^\infty dx x^3/(e^x - 1)$ auf diejenige der Summe $\sum_{n=1}^\infty n^{-4}$ zurückführen lässt (bis auf Faktoren). Nutze dann die Parsevalsche Identität

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{4}$$

wobei $f(x)$ eine periodische Funktion (im Intervall $[-\pi, \pi]$) und c_n dessen n-te Fourierkomponente ist, also $f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$. Man nehme als Funktion $f(x) = x^2$ im besagten Intervall.

Übung 3. Stern-Gerlach Experiment[3] (1922)

Lernziel: Wir beschäftigen uns mit der Quantisierung des Drehimpulses indem wir das Stern-Gerlach Experiment genauer untersuchen und die zu erwartenden Ergebnisse für ein klassisches und quantenmechanisches System diskutieren.

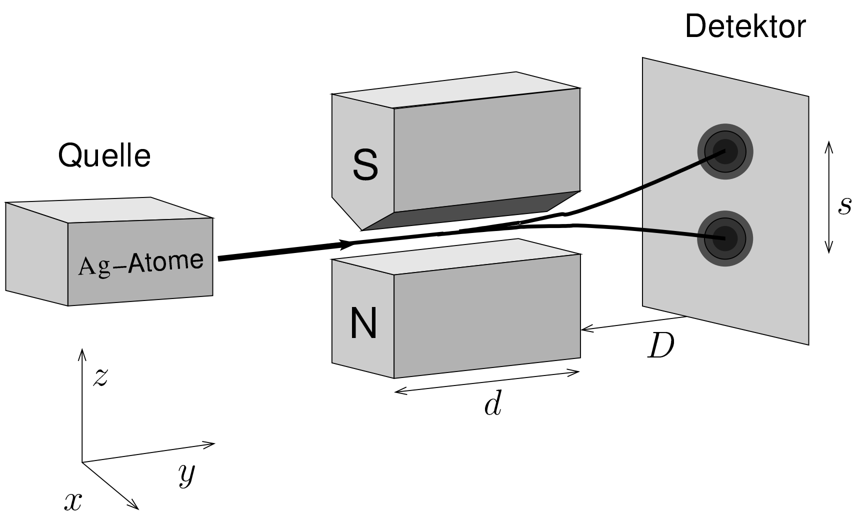

Abbildung 1: Illustration des Stern-Gerlach Experiments. Ein ebener Nord- und ein keilförmiger Südpol erzeugen einen Magnetfeldgradienten entlang z.

Thermisch angeregte Silber-Atome mit magnetischem Moment $\boldsymbol{\mu}$ werden über eine Länge d einem inhomogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ (mit Gradient entlang z) ausgesetzt (siehe Abb. 1). Durch die

[3] W. Gerlach and O. Stern, *Zeitschrift für Physik* **9**, 349-352 (1922)

Wechselwirkung $U = -\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B}$ erfahren die Atome eine Kraft $\boldsymbol{F} = -\nabla U$. Nach der Wechselwirkung fliegen die Atome ballistisch bis zu einem Detektor (Distanz zum Schirm D)

(a) Ermittle die Kraft welche auf die Atome wirkt und bestimme daraus den Impulsübertrag.

(b) Welche Ablenkung s erfährt ein Atom mit magnetischem Moment $\boldsymbol{\mu}$ bis zum Schirm? Diskutiere das Ergebnis für die Grenzwerte $d \ll D$ und $d \gg D$. Welcher Grenzfall kam im originalen Experiment zum Einsatz?

Hinweis: Beschreibe die Wechselwirkungsregion d und den ballistischen Flug D separat.

(c) Beschreibe das Signal am Detektor für eine kontinuierliche Verteilung der magnetischen Momente $|\mu_z| \leq \mu_{\mathrm{Ag}}$. Wie verändert sich das Signal wenn das magnetische Moment quantisiert ist, d.h. wenn nur die Zustände $\mu_z = \pm\mu_{\mathrm{Ag}}$ erlaubt sind?

(d) Beschreibe qualitativ was passiert wenn die Atome sukzessiv inhomogenen Feldern mit Gradient entlang z, entlang x und erneut entlang z ausgesetzt werden (y sei die Flugrichtung). Im weiteren Verlauf des Semesters wird dieses Szenario genauer diskutiert werden.

Übung 4. Davisson und Germer Experiment (1927)

Lernziel: Diese Übung befasst sich mit der Streuung von Photonen, Elektronen und Helium an Oberflächen. Die resultierende Interferenz für Elektronen und Helium zeigt die Welleneigenschaft von Materie. Wir lernen bei welchen Energien die verschiedenen Streukörper Beugungsmuster erzeugen.

Clinton Davisson (Nobelpreis 1937) und sein Assistent Lester Germer führten 1927 Streuexperimente[4] von Elektronen an Kristalloberflächen durch und bestätigten damit die Welleneigenschaft der Elektronen, welche von Louis De Broglie 1923 vorausgesagt wurde (Nobelpreis 1929). Gemäss De Broglie lässt sich einem Teilchen mit Impuls p eine Welle mit Wellenlänge $\lambda = h/p$ zuordnen.

(a) Bestimme die De Broglie-Wellenlänge $\lambda_{\mathrm{el}}(E)$ von Elektronen für Energien E. Drücke E in eV-Einheiten aus und gib l_{el} in Ångström ($1\text{Å} = 10^{-10}$m) an. Nutze dazu den Trick $\hbar = \sqrt{\hbar^2} = \sqrt{6.58 \cdot 10^{-16}[\mathrm{eV}s]\, 1.055 \cdot 10^{-34}[\mathrm{Js}]}$

(b) Bestimme analog die De Broglie-Wellelänge $\lambda_{\mathrm{He}}(E)$ für Helium mit $m_{\mathrm{He}}/m_{\mathrm{el}} \approx 7300$.

(c) Wie sieht der Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Energie bei Photonen aus? Bestimme auch hier $\lambda_{\mathrm{ph}}(E)$.

Wir vergleichen im Folgenden die Streuung von Photonen, Elektronen und Helium an einer Kristalloberfläche mit Gitterkonstante a.

(d) Welche Energien benötigen Photonen, Elektronen und Helium, um an eine Kristalloberfäche von Nickel ($a = 3.5$Å) zu streuen? Ermittle daraus die entsprechenden thermischen Energien $k_B T$.

Hinweis: Streuung an einer Oberfläche erlaubt, diese abzubilden. Hierfür muss die Wellenlänge etwa der Gitterkonstanten entsprechen.

[4] C. Davisson and L. H. Germer, Phys. Rev. **30**, 705-741 (1927)