Quantenmechanik I. Übung 13.

HS 13 *Keine Abgabe*

1. Projektive Darstellungen der Gruppe $(\mathbb{R},+)$

Ziel der Aufgabe ist es, zu zeigen, dass jede projektive Darstellung U der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ durch passende Umeichung einer (ordentlichen) Darstellung entspricht. Sei also $U(t)$, ($t \in \mathbb{R}$) ein Schar von (unitären) Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. $U : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, welche die Darstellungsbedingung

$$U(t_1)U(t_2) = \omega(t_1, t_2)U(t_1 + t_2) \tag{1}$$

bis auf eine Phase $\omega(t_1, t_2) \in \mathbb{C}$, $|\omega(t_1, t_2)| = 1$ erfüllt. Nehme an, $\omega(t_1, t_2)$ sei differenzierbar in t_1, t_2. Zu zeigen ist, dass es eine Phase $\lambda(t) \in \mathbb{C}$, $|\lambda(t)| = 1$ gibt, so dass nach der "Eichtransformation" $\tilde{U}(t) := \lambda(t)U(t)$ eine Darstellung vorliegt:

$$\tilde{U}(t_1)\tilde{U}(t_2) = \tilde{U}(t_1 + t_2)\ . \tag{2}$$

Der "Kozykel" $\omega(t_1, t_2)$ der projektiven Darstellung U erfüllt allgemein Gleichung (7.7),

$$\omega(t_1, t_2)\omega(t_1 + t_2, t_3) = \omega(t_1, t_2 + t_3)\omega(t_2, t_3)\ , \tag{3}$$

und somit $\omega(t, 0) = \omega(0, t) = \omega(0, 0)$. Er transformiert zu dem $\tilde{\omega}(t_1, t_2)$ von $\tilde{U}$ gemäss (7.8),

$$\tilde{\omega}(t_1, t_2)\lambda(t_1 + t_2) = \omega(t_1, t_2)\lambda(t_1)\lambda(t_2)\ . \tag{4}$$

i) Wie lautet folglich die Bedingung (a) an λ, damit (2) gilt? Und, falls U bereits eine Darstellung ist, wie die (b), dass $\tilde{U}$ es auch bleibt? Was sind die Lösungen von (b)?

ii) Zeige: Man darf annehmen, dass

$$\omega(t, 0) = \omega(0, t) = \omega(0, 0) = 1 \tag{5}$$

gilt. Folgere aus (a), dass $\lambda(0) = 1$. Und aus (b), dass $\lambda'(0) = 0$ angenommen werden darf.

iii) Setze

$$\omega'(t) := \frac{\partial}{\partial s}\omega(t, s)\Big|_{s=0}$$

und zeige

$$\frac{\partial}{\partial s}\log \omega(t, s) = \omega'(t + s) - \omega'(s)\ ; \tag{6}$$

ferner, dass (a) und die Randbedingungen an λ

$$\frac{d}{dt}\log \lambda(t) = \omega'(t) \tag{7}$$

implizieren.

iv) Es folgt aus (7), dass nur eine Funktion $\lambda(t)$ in Frage kommt. Zeige, dass sie (a) erfüllt.