Quantenmechanik I. Übung 11.

HS 13 *Abgabe:* Di 10. Dezember 2013

1. Zeitliche Verzögerung bei Streuung

Betrachte das Integral

$$\int a(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(p)}dp \,,$$

wobei $a(p) \geq 0$ und $\varphi(p)$ glatte Funktionen sind und $\operatorname{supp} a$, der Träger von $a(p)$, kompakt ist. Die Beiträge von $a(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(p)}dp$ zum Integral interferieren destruktiv, wenn $\varphi(p)$ stark mit p variiert. Wird die Phase jedoch an einem Punkt $p_0 \in \operatorname{supp} a$ stationär,

$$\varphi'(p_0) = 0 \,, \tag{1}$$

so ist die Interferenz für Werte p nahe bei p_0 konstruktiv. *Hinweis:* Allgemeines zur Methode der stationären Phase in Anhang C.

i) Die zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets in Dimension 1 ist

$$\psi(x,t) = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} \int a(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}((px/\hbar)-(p^2t/2m\hbar)+\alpha(p))}dp \,, \tag{2}$$

wobei die Polarzerlegung von $\widehat{\psi}(p) = a(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(p)}$, $(a(p) \geq 0, \alpha(p) \in \mathbb{R})$ verwendet wurde. Der Träger der Funktion $a(p)$ sei ein enger Bereich um p_0. Zeige, dass das Paket zum Zeitpunkt t um $x(t) = x_0 + p_0 t/m$ konzentriert ist und somit einer Trägheitsbahn folgt.

ii) Betrachte ein Potential wie in Aufgabe 6.2, sowie die von links einlaufende Welle

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} + r(E)\mathrm{e}^{-ipx/\hbar} \,, & (x < -x_*) \\ t(E)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} \,, & (x > x_*) \end{cases}$$

mit $E = p^2/2m$, $(p > 0)$; ferner ein damit gebildetes Wellenpaket (2) mit $\psi_E(x)$ anstelle von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}$.

a) $t \to -\infty$: Zeige, dass sich das Wellenpaket $\psi(x,t)$ im Wesentlichen auf $x < -x_*$ beschränkt und sich dort nach rechts bewegt wie das Paket aus i).

b) $t \to +\infty$: Zeige, dass das Wellenpaket aus zwei Paketen besteht, von denen eines in $x < -x_*$ nach links läuft und das andere in $x > x_*$ nach rechts läuft. Bestimme die Bahn des nach rechts laufenden Pakets. Um wie viel Zeit läuft diese Bahn jener des freien Wellenpakets hinterher?

Hinweis: Die Verzögerung wird eine Funktion der Phase $\delta(E)$ von $t(E) = |t(E)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(E)}$ sein.

2. Niederenergetische Streuung und Streulänge

Betrachte die Streuung an einem sphärisch symmetrischen Potential endlicher Reichweite R_0.

i) Zeige für die Streuphasen, dass

$$\delta_l(k) = O(k^{2l+1}) , \qquad (k \to 0) . \tag{3}$$

Schliesse daraus, dass im niederenergetischen Limes die Streuung auf die s-Welle ($l = 0$) beschränkt ist: Der differentielle Streuquerschnitt wird unabhängig vom Streuwinkel, und zwar

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(k = 0, \vec{e}) = a^2 \tag{4}$$

mit der Streulänge

$$a = -\lim_{k\to 0} \frac{\delta_0(k)}{k} . \tag{5}$$

Insbesondere ist $\sigma(k = 0) = 4\pi a^2$.

Gehe wie folgt vor: Sei $\tilde{\jmath}_l(\rho)$ durch die Partialwellenentwicklung (5.18) der ebenen Welle definiert und $\tilde{h}_l(\rho)$ als Lösung der freien radialen Schrödinger-Gleichung (5.19) mit Asymptotik $\tilde{h}_l(\rho) = e^{\mathrm{i}(\rho - l\pi/2)}(1 + O(\rho^{-1})), (\rho \to \infty)$. Zeige $\tilde{\jmath}_l(\rho) = \operatorname{Im} \tilde{h}_l(\rho)$ und leite die Asymptotik

$$\tilde{\jmath}_l(\rho) \cong c_l \rho^{l+1} , \qquad \tilde{n}_l(\rho) \cong \frac{1}{(2l+1)c_l}\rho^{-l} , \qquad (\rho \to 0) \tag{6}$$

her, wobei $\tilde{n}_l(\rho) := \operatorname{Re} \tilde{h}_l(\rho)$. Die Koeffizienten c_l brauchen nicht bestimmt zu werden.

Hinweis: Wie verhalten sich die Lösungen der freien radialen Schrödinger-Gleichung für $\rho \to \infty$ im Allgemeinen? Und wie für $\tilde{\jmath}_l$ im Speziellen? Verwende dann, dass die Wronski-Determinante $W(\rho) = u_1(\rho)u_2'(\rho) - u_1'(\rho)u_2(\rho)$ zweier Lösungen der selben Energie konstant ist.

Es sei nun daran erinnert, dass die Streuphase $\delta_l(k)$ durch das Verhalten

$$u_l(k, r) = C_l(k)\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l(k)}\tilde{h}_l(kr) - \overline{\tilde{h}_l(kr)}\big) , \qquad (r > R_0, k > 0) , \tag{7}$$

der regulären Lösung $u_l(k, r) \cong r^{l+1}, (r \to 0)$ von (4.9) bestimmt ist. Für $k = 0$ ist hingegen

$$u_l(k = 0, r) = a_l r^{-l} + b_l r^{l+1} , \qquad (r > R_0) , \tag{8}$$

mit $b_l \neq 0$ generischerweise, d.h. Potentiale $\mathcal{V}$, für welche das Gegenteil zutrifft, sind die Ausnahme. Schreibe (7) als

$$u_l(k, r) = A_l(k)\tilde{n}_l(kr) + B_l(k)\tilde{\jmath}_l(kr) , \qquad (r > R_0, k > 0) \tag{9}$$

und folgere

$$\frac{A_l}{B_l} = \tan \delta_l . \tag{10}$$

Zeige nun (3) durch Betrachtung des Limes $k \to 0$. *Hinweis:* Verwende (6).

ii) Zeige: Die Streulänge ist auch bestimmt durch die reguläre Lösung für $l = 0$ und $k = 0$ der Form $u(r) = r - a$, $(r > R_0)$, bzw. durch

$$a = r - \frac{u(r)}{u'(r)}, \qquad (r > R_0) ,$$

bei beliebiger Normierung von u. Insbesondere beträgt sie a für eine harte Kugel vom Radius a. *Hinweis:* Berechne c_0.