Quantenmechanik I. Übung 9.

HS 13 *Abgabe:* Di 26. November 2013

1. Teilchen in der Ebene mit transversalem magnetischem Feld, Teil 1

Vorbemerkung: Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ ist ein Skalar: $\vec{a} \wedge \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Die Rotation $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ eines Felds $\vec{A}(\vec{x}) = (A_1, A_2)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} = (x_1, x_2)$ ist folglich ein Skalarfeld,

$$B(\vec{x}) \equiv \operatorname{rot} \vec{A} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \ .$$

Man kann es als ein magnetisches Feld in $\mathbb{R}^3$ auffassen, welches transversal zur Ebene, $(0, 0, B) = \operatorname{rot}(A_1, A_2, 0)$, und unabhängig von x_3 ist.

Einem geladenen Teilchen in einem zeitlich konstanten magnetischen Feld entspricht der Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m}\big(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x})\big)^2$$

auf $L^2(\mathbb{R}^2)$. Das Spektrum von H ist unabhängig von der Eichung, denn verschiedenen Eichungen entsprechen nach (3.33) unitär equivalente Hamiltonoperatoren.

Das magnetische Feld sei auch räumlich konstant mit $eB > 0$. Zeige, dass

$$E_n = \hbar\omega\big(n + \frac{1}{2}\big) \ , \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

die Eigenwerte sind, wobei $\omega = eB/mc$. Betrachte dazu die beiden Eichungen

$$\text{(a)} \quad \vec{A} = (-Bx_2, 0) \ , \qquad \text{(b)} \quad \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{x} = \frac{B}{2}(-x_2, x_1) \ .$$

i) (Heuristische Überlegung). Klassisch bewegt sich das Teilchen auf einer Kreisbahn mit

$$m\vec{v} = -\frac{e}{c}\vec{B} \wedge \vec{R}\,, \tag{2}$$

wobei $\vec{R}$ der Radiusvektor ist. Insbesondere verläuft die Bahn im Uhrzeigersinn (linkszirkular) mit Frequenz ω. Nach de Broglie (vgl. Aufgabe 3.1) ist die Bewegung auf einer Kreisbahn quantisiert gemäss $pR = n\hbar$, $(n = 0, 1, \ldots)$. Zeige, dass (1) folgt, bis auf den fehlenden Term 1/2.

Hinweis: Das Vorgehen setzt voraus, dass $\vec{p} = m\vec{v} + (e/c)\vec{A}$ einen konstanten Betrag p hat. Dies ist in der Eichung (b) der Fall, falls die Kreisbahn ihren Mittelpunkt im Ursprung hat.

ii) Bestimme Eigenwerte und Eigenfunktionen ψ auf quantenmechanischem Wege. Im Fall (a) reduziert der Ansatz $\psi(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_1}\varphi(x_2)$ das Eigenwertproblem auf einen 1-dimensionalen harmonischen Oszillator. Im Fall (b) hingegen ist das Problem mit dem 2-dimensionalen harmonischen Oszillator verwandt. Es kann mit Hilfe von Erzeugungsoperatoren gelöst werden,

$$a_\pm^* = \frac{1}{\sqrt{2m\tilde{\omega}\hbar}}\big(m\tilde{\omega}\frac{x_1 \pm \mathrm{i}x_2}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{p_1 \pm \mathrm{i}p_2}{\sqrt{2}}\big) \ , \tag{3}$$

(mit $\tilde{\omega} = \omega/2$) für rechts-(+), respektive links-zirkulare (−) Anregungen, zusammen mit ihren Adjungierten, den Vernichtungsoperatoren $a_\pm$. Wie lauten ihre Kommutationsrelationen und welche Bedeutung hat $N_\pm := a_\pm^* a_\pm$?

Zusatz: Die Eigenwerte E_n sind unendlich entartet, was ohne zusätzlichen Aufwand ersichtlich sein wird. Zeige darüber hinaus: Die Entartung pro Flächeneinheit beträgt

$$\rho = \frac{eB}{hc} \, . \tag{4}$$

mit $h = 2\pi\hbar$. Dies kann heuristisch im Rahmen von (i) oder strenger in dem von (ii, a) verstanden werden.

Hinweis: Im ersten Rahmen: Welche Fläche kommt einem Zustand zu? Im Zweiten: Was ist die Entartung, wenn statt der gesamten Ebene das Gebiet $(x_1, x_2) \in [0, L_1] \times [0, L_2]$ betrachtet wird?

2. Eigenwertspektrum des Wasserstoffatoms

Ziel der Aufgabe ist es, die Energien der gebundenen Zustände des H-Atoms auf alternativen (supersymmetrischen) Wege zu finden (Schrödinger 1940). In Einheiten $\hbar^2/2m = e^2 = 1$ ist der radiale Hamiltonoperator für Wellen mit Drehimpuls $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$H_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{r} \qquad \text{auf } L^2[0, \infty) \, .$$

Zur Überprüfung des Resultats: Die Eigenwerte von H_l sind $-1/4n^2$, $(n = l+1, l+2, \ldots)$ in diesen Einheiten.

i) Bestimme E_l so, dass $H_-^{(l)} = H_l - E_l$

- von der Form wie in Gl. (U8.4) ist;
- Eigenwert 0 hat.

Hinweis: Ansatz: $q(r) = a + br^{-1}$.

ii) Zeige: Der Partner ist $H_+^{(l)} = H_{l+1} - E_l$.

iii) Bestimme die (negativen) Eigenwerte von H_l mit Hilfe der Eigenschaften (a-c) aus Aufgabe 8.2.