Quantenmechanik I. Übung 8.

HS 13 *Abgabe:* Di 19. November 2013

1. Verschiebungsoperatoren und kohärente Zustände

i) Seien $U(s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ps/\hbar}$ und $\tilde{U}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt/\hbar}$ die Translationen im Orts– und Impulsraum, und $V(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha a^* - \bar{\alpha} a}$, wie in der Gl. vor (3.45). Zeige, dass i.A. $V(\alpha)$ und $V(\beta)$ nur bis auf eine Phase kommutieren:

$$V(\alpha)V(\beta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\alpha,\beta)}V(\beta)V(\alpha) \ .$$

Wie lautet die entsprechende Beziehung zwischen $U(s)\tilde{U}(t)$ und $\tilde{U}(t)U(s)$? Wann kommutieren $V(\alpha)$, $V(\beta)$ bzw. $U(s)$, $\tilde{U}(t)$?

ii) Kohärente Zustände $|\alpha\rangle = V(\alpha)|0\rangle$ (mit $a|0\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$) sind nie orthogonal. Zeige:

$$\langle \alpha_1|\alpha_2\rangle = \exp\bigl(-\frac{1}{2}\left|\alpha_1 - \alpha_2\right|^2 + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\bar{\alpha}_1\alpha_2)\bigr) \ . \tag{1}$$

Hinweis: Führe die Berechnung von $\langle \alpha_1|\alpha_2\rangle$ auf jene von $\langle 0|V(\alpha)|0\rangle$ zurück.

iii) Zeige, dass die Linearkombinationen der kohärenten Zustände dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegen, d.h.

$$\langle \psi|\alpha\rangle = 0 \ , \quad (\alpha \in \mathbb{C}) \quad \Longrightarrow \quad |\psi\rangle = 0 \ .$$

Hinweis: Betrachte die Funktion $f(\alpha) = \mathrm{e}^{|\alpha|^2/2}\langle\psi|\alpha\rangle$ und verwende, dass die Eigenzustände $|n\rangle$, $(n \in \mathbb{N})$ des harmonischen Oszillators eine orthonormierte Basis bilden.

iv) Leite die Zerlegung der Eins in Projektoren $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ auf kohärente Zustände her:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha| d(\mathrm{Re}\,\alpha) d(\mathrm{Im}\,\alpha) = \mathbb{1} \tag{2}$$

bzw.

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int |x,p\rangle\langle x,p| dx dp = \mathbb{1} \ , \tag{3}$$

mit $|x,p\rangle := |\alpha\rangle$ für $\sqrt{2\hbar}\alpha = x + \mathrm{i}p$.

Hinweise: Wegen (iii) genügt es, Matrixelemente $\langle\beta| \cdot |\gamma\rangle$ der vorkommenden Ausdrücke zu betrachten. Verwende den Hinweis aus Aufgabe 6.1 zur Berechnung der auftretenden Gaussschen Integrale. *Bemerkung:* Heuristisch entspricht nach (3) jedem Phasenvolumen $2\pi\hbar$ ein quantenmechanischer Zustand, wie bei der Sommerfeld–Quantisierung.

2. Partnerpotentiale

i) Betrachte die beiden Hamiltonoperatoren auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$$H_\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + q^2(x) \pm q'(x) \tag{4}$$

für eine reelle Funktion $q(x)$. Zeige:

a) $H_\pm \geq 0$.

b) Die Partner $H_\pm$ haben dieselben Eigenwerte λ mit der möglichen Ausnahme von $\lambda = 0$.

c) $\lambda = 0$ kann Eigenwert von höchstens einem Partner sein. Für welche $q(x)$ ist dies der Fall und für welchen Partner? Die Anwort ist "topologisch": Sie ändert sich nicht, wenn $q(x)$ auf einem beschränkten Intervall abgeändert wird.

Hinweise: Für welche Funktion $q(x)$ ist (4) mit dem harmonischen Oszillator verwandt? Passe die Definition des Vernichtungsoperators a so an, dass $H_\pm = a_\mp a_\pm$ mit $a_- = a$, $a_+ = a^*$, und verwende ihn wie in der Vorlesung. Zu (c): Drücke allfällige Eigenfunktionen $\psi_\pm$ zu $\lambda = 0$ durch eine Stammfunktion $Q(x)$ von $q(x)$, ($Q' = q$) aus. Die Antwort schlägt sich dann in einer Eigenschaft von Q nieder. *Bemerkung* (für die fernere Zukunft): Die Partner $H_\pm$ bilden ein supersymmetrisches Paar.

ii) Beschreibe in Worten die Partnerpotentiale für $q(x) = x + gx^2$, (g klein). Zeige, dass $H_\pm$ für $g \neq 0$ unitär äquivalent sind. Diskutiere den Limes $g \to 0$ in Bezug auf die Anwort auf (c).

Hinweis: Die unitäre Transformation ist eine Spiegelung um $x_0 = -1/2g$.

iii) Ein Gegenstück von (4) auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist

$$H_\pm = -\Delta + \vec{q}(\vec{x})^2 \pm \operatorname{div} \vec{q}(\vec{x}) \, . \tag{5}$$

Eigenschaften (a-c) gelten dank kleinsten Anpassungen der Herleitung im Fall $n = 1$. Zeige bloss: Ein notwendiges Kriterium dafür, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von H_+ oder H_- ist, ist, dass $\vec{q}$ ein Gradientenfeld ist ($\vec{q} = \vec{\nabla} Q$).