Quantenmechanik I. Übung 7.

HS 13 *Abgabe:* Di 12. November 2013

1. Ein halber harmonischer Oszillator

Betrachte ein Teilchen in einer Dimension und im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty\ , & (x < 0)\ , \\ \frac{1}{2}x^2\ , & (x > 0)\ . \end{cases}$$

Finde Eigenwerte und Eigenfunktionen des entsprechenden Hamiltonoperators in Einheiten $m = \hbar = 1$.

Hinweis: Der divergente Teil des Potentials kann durch eine Randbedingung $\psi(x = 0) = 0$ für die Wellenfunktion auf $x \geq 0$ ersetzt werden, vgl. Aufgabe 5.1.

2. Energie-Zeit Unschärferelation

In scheinbarer Ähnlichkeit zur Ort-Impuls Unschärferelation, $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$, findet man in der Literatur die Behauptung

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}\ . \tag{1}$$

Ihre Deutung ist dadurch erschwert, dass es in der Quantenmechanik keine Observable "Zeit"gibt. Hier sind zwei mögliche Deutungen (beide Mandelshtam und Tamm 1945).

i) Der Erwartungswert einer Observablen A ändert sich mit der Rate $\dot{A} := d\langle A\rangle_{\psi_t}/dt$. Die Zeit t (so die Interpretation) ist die, bei der A einen bestimmten Wert über- oder unterschreitet. Da die Messung von A einer Schwankung ΔA unterliegt, ist

$$\Delta t := \frac{\Delta A}{|\dot{A}|}$$

die damit verbundene Unschärfe. Zeige (1). *Hinweis:* Verwende die Bewegungsgleichung im Heisenberg-Bild,

$$\dot{A}(t) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, A(t)]\ . \tag{2}$$

ii) Ein Zustand $|\psi_0\rangle$ entwickelt sich gemäss der Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}|\psi_t\rangle = H|\psi_t\rangle\ . \tag{3}$$

Sei $t_0 > 0$ eine Zeit, die $|\psi_t\rangle$ mit Sicherheit vom Anfangszustand $|\psi_0\rangle$ unterscheidbar macht:

$$\langle\psi_0|\psi_{t_0}\rangle = 0\ .$$

Zeige:

$$\Delta E \cdot t_0 \geq \hbar \cdot \frac{\pi}{2}\ .$$

Hinweise: Schätze $|\dot{f}(t)|$ ab für $f(t) = |\langle\psi_0|\psi_t\rangle|^2$. Die Rechnung führt auf $\langle\psi_t|\,[P,H]\,|\psi_t\rangle$ mit $P = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$; verwende dafür die Unschärferelation (3.24). Benutze schliesslich den Vergleich, bzw. das unbestimmte Integral

$$\dot{f}(t) \geq g(f(t)),\ \dot{f}_0(t) = g(f_0(t)),\ f(0) = f_0(0) \quad \Longrightarrow \quad f(t) \geq f_0(t),\ (t \geq 0)\ , \tag{4}$$

$$\int \frac{df_0}{\sqrt{f_0(1-f_0)}} = -2\arccos\sqrt{f_0} + C\ . \tag{5}$$

iii) Umgekehrt hat Deutung (ii) ein Gegenstück für Ort und Impuls, z.B. in Dimension 1: Sei $|\psi_x\rangle$ der um x verschobene Zustand $|\psi_0\rangle$ und $x_0 > 0$ so, dass $\langle\psi_0|\psi_{x_0}\rangle = 0$. Zeige:

$$\Delta p \cdot x_0 \geq \hbar \cdot \frac{\pi}{2}\ .$$

Hinweis: Wähle H passend in Gl. (3).

3. Streuung und Ohmsches Gesetz

Ladungsträger (Elektronen) der Ladung e treffen in einer Dimension auf einen Streuer mit Reflexions- und Transmissionskoeffizienten R und T. Dieser weist einen elektrischen Widerstand (Landauer 1970)

$$\rho = \frac{2\pi\hbar}{e^2}\frac{R}{1-R} = \frac{2\pi\hbar}{e^2}\frac{1-T}{T}$$

auf ($2\pi\hbar/e^2 = 25.812\,\mathrm{k\Omega}$) (Genauer: $R = R(E_F)$ mit Fermi-Energie E_F; Begründung verfrüht).

i) Zwei Streuer, 1 und 2, seien durch eine Strecke l getrennt. Zeige

$$\frac{1-T_{12}}{T_{12}} = \frac{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}\cos\theta}{T_1 T_2}\ ,$$

wobei nur θ von l abhängt. Berechne so den Widerstand ρ_{12} beider Streuer zusammen (Schaltung in Serie).

Hinweise: Wie ändert sich die Streumatrix, wenn ein Streuer um l verschoben wird ($V(x) \rightsquigarrow V(x-l)$)? Verwende danach das Ergebnis von Aufgabe 6.2(v).

ii) Berechne den Mittelwert über l (wieder mit ρ_{12} bezeichnet). Das Ergebnis ist

$$\rho_{12} = \rho_1 + \rho_2 + \frac{e^2}{\pi\hbar}\rho_1\rho_2\ . \tag{6}$$

Beachte die Abweichung von der aus der Elektrizitätslehre bekannten Formel $\rho_{12} = \rho_1 + \rho_2$.

iii) Ein ungeordnetes Medium kann grob durch identische Streuer modelliert werden, die in zufälligen Abständen angeordnet sind. Sei $\rho(x)$ der Widerstand einer Strecke x, die viele Streuer enthält, und $k = \lim_{x\to 0}\rho(x)/x$ der Widerstand pro (makroskopische) Längeneinheit. Begründe die Differentialgleichung

$$\frac{d\rho}{dx} = k\big(1 + \frac{e^2}{\pi\hbar}\rho(x)\big) \tag{7}$$

und löse sie. Zeige, dass für $kx \ll \pi\hbar/e^2$ der übliche lineare Verlauf von $\rho(x)$ gilt; für grössere x aber ein exponentieller.