Quantenmechanik I. Übung 5.

HS 13 — *Abgabe:* Di 29. Oktober 2013

1. Teilchen im Potentialtopf

Betrachte einen ein-dimensionalen, ∞-tiefen Potentialtopf der Breite a, dargestellt als das Intervall $0 \leq x \leq a$. Die Energie eines Teilchens darin entspricht dem Hamiltonoperator H auf $\mathcal{H} = L^2([0,a])$:

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} \;, \qquad (\psi(0) = \psi(a) = 0) \;,$$

wobei die Randbedingungen den Definitionsbereich des Operators festlegen.

Das Teilchen befinde sich im Eigenzustand tiefster Energie (Grundzustand) des Topfs der Breite $a/2$. Zu einer bestimmten Zeit werde die rechte Wand plötzlich von $x = a/2$ nach $x = a$ verschoben.

i) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass danach das Teilchen im ersten angeregten Zustand, bzw. im Grundzustand des Potentialtopfs der Breite a ist.

Hinweis: Der Zustand ist unmittelbar nach der Verschiebung noch derselbe.

ii) Bleibt der Erwartungswert der Energie des Teilchens bei der plötzlichen Änderung erhalten? Berechne auch das Schwankungsquadrat der Energie.

2. Galilei-Transformation und Schrödinger-Gleichung

i) Unter einer Galilei-Transformation $O' \to O$ transformieren Ort und Impuls gemäss

$$\vec{x} = \vec{x}\,' + \vec{u}t \;, \qquad \vec{p} = \vec{p}\,' + m\vec{u} \;, \tag{1}$$

wobei $\vec{u}$ die Geschwindigkeit von O' bezüglich O ist. Die Transformation der Wellenfunktion kann wie folgt heuristisch gefunden werden: Bis auf eine noch zu bestimmende Phase $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/\hbar}$ ist

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'/\hbar} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{u}t)/\hbar}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/\hbar} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\vec{p}\,'+m\vec{u})\cdot(\vec{x}-\vec{u}t)+\alpha]/\hbar} \;. \tag{2}$$

Bestimme $\alpha = \alpha(\vec{u}, t)$ (unabhängig von $\vec{p}$) auf eine der folgenden Weisen:

• Falls die Galilei-Transformation (1) mit einer weiteren, $\vec{p}\,' = \vec{p}\,'' + m\vec{v}$, zusammengesetzt wird, so ist die resultierende Phase in $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\,''\cdot\vec{x}\,''/\hbar} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/\hbar}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$ dieselbe wie die der einen Transformation $\vec{p} = \vec{p}\,'' + m(\vec{v} + \vec{u})$.

• (s. Allgemeine Mechanik) Eine Funktion $S(\vec{p}\,', \vec{x}, t)$ erzeugt eine kanonische Transformation $(\vec{p}\,', \vec{x}\,') \to (\vec{p}, \vec{x})$, sofern die Auflösung der Gleichungen

$$\vec{x}\,' = \frac{\partial S}{\partial \vec{p}\,'} \;, \qquad \vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{x}} \tag{3}$$

nach $\vec{p}, \vec{x}$ möglich ist. Dabei ist $H' = H + (\partial S/\partial t)$. Beachte, dass $S_0 = \vec{p}\,' \cdot \vec{x}$ die Identität $\vec{x}\,' = \vec{x}$, $\vec{p}\,' = \vec{p}$ erzeugt. Fasse (2) auf als $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'/\hbar} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(\vec{p}\,',\vec{x},t)/\hbar}$. Zeige, dass S die

Transformation (1) erzeugt und bestimme α derart, dass $S = S_0$ für $\vec{u} = 0$ und allgemein $H' = \vec{p}\,'^2/2m$ für $H = \vec{p}\,^2/2m$.

Hinweis: Das Ergebnis ist $\alpha(\vec{u}, t) = m\vec{u}\,^2 t/2$.

ii) Zeige, dass (2) auf ein Wellenpaket

$$\psi'(\vec{x}\,', t) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \hat{\psi}'(\vec{p}\,', t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'/\hbar} d^3p'$$

angewandt die quantenmechanische Galilei-Transformation

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi'(\vec{x} - \vec{u}t, t)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}m(\vec{u}\cdot\vec{x} - \vec{u}\,^2 t/2)}$$

liefert. Verifiziere schliesslich die diesbezügliche Invarianz der freien Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi \ :$$

ψ ist eine Lösung, falls ψ' eine ist.

Hinweis: Die Lösung von Teil (ii) erfordert jene von Teil (i) nicht, sondern nur dessen Ergebnis.