Quantenmechanik I. Übung 2.

HS 13 *Abgabe:* Di 8. Oktober 2013

1. Von der Quantisierung zur Strahlungsformel

Planck begründetete die Strahlungsformel (1.16) mit der Quantisierungsbedingung (1.17), allerdings anders als in der Vorlesung dargestellt. Er verwendete die Formel

$$S(E) = k \log \Gamma \,, \tag{1}$$

wobei S die Entropie eines makroskopischen Zustands der Energie E ist und Γ die Anzahl der damit verträglichen mikroskopischen Zuständen.

Betrachte ein System bestehend aus N Resonatoren der selben Frequenz, deren einzelne Energien Vielfaches eines Quantums Δ sein sollen.

i) Auf wieviele Arten Γ kann die Gesamtenergie $E = p \cdot \Delta$, $(p \in \mathbb{N})$ auf die N Resonatoren aufgeteilt werden? *Hinweis:* Jede Aufteilung entspricht einer Anordung von $N - 1 + p$ Objekten,

$$\bullet \bullet \cdots \bullet \,|\, \bullet \cdots \bullet \,|\, \bullet \cdots \ldots \cdots \bullet \,|\, \bullet \cdots \bullet \,,$$

unter denen $N - 1$ als Striche aufgefasst werden, die p Punkte in N Gruppen aufteilen.

ii) Berechne $S(E)$ für $p, N \gg 1$ mit Hilfe der Stirling Formel

$$\log N! \cong N(\log N - 1)$$

und daraus die mittlere Entropie $s(e) = S(E)/N$ eines Resonators, wobei $e = E/N$.

iii) Bestimme ds/de und wähle Δ so, dass Übereinstimmung mit Plancks Strahlungsformel erzielt wird. *Hinweis:* Dazu genügt Übereinstimmung mit Gl. (5) der Lösung von Aufgabe 1.2, wie dort gezeigt.

iv) Betrachte anstelle von (1) Boltzmanns Weise zu zählen:

$$S(E) = k \log \frac{\Gamma}{p!} \,,$$

wobei bei der Berechnung der obigen Zahl Γ die Quanten als zunächst unterscheidbar gelten und $p!$ ihre Ununterscheidbarkeit anschliessend in Rechnung stellt (korrigierte Boltzmann-Zählung nach Gibbs, s. Theorie der Wärme; Anmerkung: $\Gamma/p!$ ist keine ganze Zahl). Zeige: $s(e)$ führt auf die Wiensche Strahlungsformel. *Hinweis:* Der entsprechende Ausdruck für $s(e)$ ist (1.20).

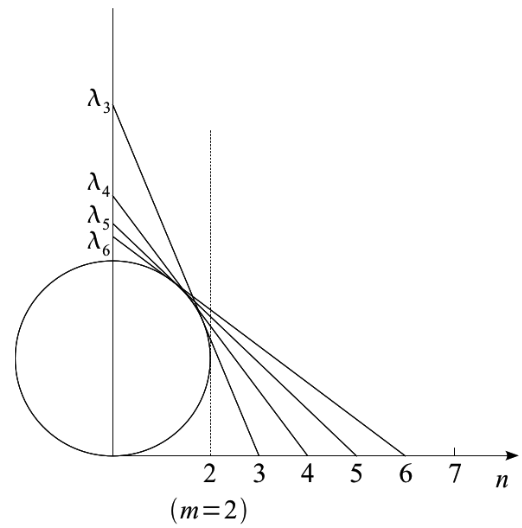
2. Wie Balmer zur Formel kam

Diese Aufgabe ist nicht mehr als eine verzichtbare Kuriosität zum Ursprung der Formel

$$\omega_{mn} \propto \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \tag{2}$$

$(n, m = 1, 2, \ldots, n > m)$ für die Spektrallinien des H-Atoms.

Der Mathematik- und Zeichenlehrer Balmer trug die beobachteten Wellenlängen $\lambda_n = \lambda_{mn}$ für $m = 2$, $n = 3, 4, 5, 6$ als Strecken auf einer Geraden ab (vertikal in der Figur). In der resultierenden Anordnung erkannte er eine auf einem Kreis basierende geometrische Konstruktion. Sie war ihm bekannt, weil sie die scheinbare Grösse λ_n einer kreisförmigen Säule (relativ zum Durchmesser $2m$) aus der Perspektive eines Betrachters im Abstand n angibt.



Zeige, dass die Konstruktion mit (2) übereinstimmt, und verallgemeinere sie dabei gleich auf beliebiges, aber festes m.

3. Das Ritzsche Kombinationsprinzip

Die Gesamtheit der Spektrallinien (Spektrum) eines beliebigen Atoms oder Moleküls weist folgende Eigenschaft auf (Ritz 1908): Gewisse Summen und Differenzen von Frequenzen liegen selbst wieder im Spektrum. Genauer: Die Frequenzen können mit zwei Indizes $n \neq n'$, $(n, n' \in I)$ versehen werden, derart dass

$$\omega_{nn'} + \omega_{n'n''} = \omega_{nn''} \;, \qquad \omega_{nn'} = -\omega_{n'n} \;, \tag{3}$$

wobei die zweite Gleichung den Fall der Differenzen in die erste miteinbezieht.

Zeige: Falls die $(\omega_{nn'})_{n,n' \in I}$ Gl. (3) erfüllen, so sind sie von der Form

$$\omega_{nn'} = \omega_n - \omega_{n'} \;, \qquad (n, n' \in I) \;.$$

(Die Umkehrung ist trivial.) Deutung: Das Atom existiert in Zuständen n und die Linien $\omega_{nn'}$ sind Ausdruck eines Übergangs $n \to n'$.

4. Sommerfeld-Quantisierung und Korrespondenzprinzip

Eine gebundene Bahn eines Hamiltonschen Systems $H = p^2/2m + V(x)$ mit einem Freiheitsgrad ist durch seine Energie E charakterisiert, oder stattdessen durch die (reskalierte) Wirkung

$$n := \frac{1}{2\pi\hbar} \oint p \, dx \;\; :$$

eine reelle Zahl ≥ 0. Die Bahn ist quantentheoretisch zulässig, falls n eine ganze Zahl $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist.

Zeige, dass das Korrespondenzprinzip auf S. 8 wie folgt gilt: Die klassische Schwingungsfrequenz $\omega(n)$ stimmt annähernd mit der Bohrschen Frequenz $\hbar^{-1}(E(n) - E(n-1))$ überein. Voraussetzung der Näherung ist $d^2E/dn^2 \ll dE/dn$.

Hinweis: Berechne die Periode $T(E)$ der Bahn und zeige

$$\omega(n) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dn} \;.$$