Übung 1. *Rollen*

(a) Ein homogener Vollzylinder mit Masse m und Radius r rollt eine schiefe Ebene hinab. Die Ebene hat den Neigungswinkel α. Stelle mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung auf und löse sie.

Lösung. Das System hat nur eine unabhängige Koordinate. Man kann z.B. die zurückgelegte Strecke s oder den fortlaufenden Winkel φ wählen. Es gilt $\varphi r = s$ und fuer den Vollzylinder $I = mr^2/2$.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg \cdot \sin(\alpha) \cdot s = \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + mg \cdot \sin(\alpha) \cdot s \tag{L.1}$$

Die Bewegungsgleichung ergibt

$$3\ddot{s} = 2g \cdot \sin(\alpha) \tag{L.2}$$

und die Loesung ist

$$s(t) = \frac{1}{3}g \cdot \sin(\alpha) \cdot t^2 + v_0 t + s_0 \tag{L.3}$$

(b) Auf einem Wagen liegt eine Rolle mit Masse m, Radius r und Traegheitsmoment I. Wie gross ist die Beschleunigung $\ddot{x}_R$ der Rolle, wenn der Wagen die Beschleunigung $\ddot{x}_W$ erfährt und die Rolle nicht ins Rutschen kommt?

Lösung. Da die Rolle nicht rutscht, ist $x_R = x_W + r\varphi$. Die Lagrange-Funktion ist

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_R^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_R^2 + \frac{I}{2r^2}(\dot{x}_R - \dot{x}_W)^2 \tag{L.4}$$

Somit ist die resultierende Beschleunigung:

$$\ddot{x}_R = \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)^{-1} \ddot{x}_W \tag{L.5}$$

Übung 2. *Fallender Zylinder*

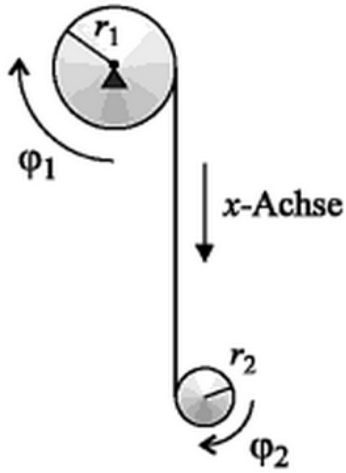
Zwei homogene Vollzylinder mit Massen m_1, m_2 und Radii r_1, r_2 sind mit einem Faden umwickelt. Zylinder 1 dreht sich reibungsfrei auf einer festen Achse, während Zylinder 2 senkrecht nach unten fällt und dabei den Faden abrollt (siehe Abbildung).

Finde die Lagrange-Funktion des Systems und stelle die Bewegungsgleichungen auf. Wie sieht deren Lösung aus? Berechne die Kraft, die auf den Faden wirkt.

Lösung. Die Höhe (im Bild die negative x-Achse) des 2. Zyliners kann durch die Abroll-Winkel φ_1 und φ_2 ausgedrückt werden: $x = r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2$. Dann ist

$$L = \frac{m_1 r_1^2}{4}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2 r_2^2}{4}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{m_2}{2}\left(r_1\dot{\varphi}_1 + r_2\dot{\varphi}_2\right)^2 + m_2 g\left(r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2\right) \tag{L.6}$$

Die zwei Bewegungsgleichungen lauten dann:



$$m_2 g = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) r_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 r_2 \ddot{\varphi}_2 \tag{L.7}$$

$$g = \frac{3}{2} r_2 \ddot{\varphi}_2 + r_1 \ddot{\varphi}_1 \tag{L.8}$$

oder einfach

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2m_2 g}{(3m_1 + 2m_2)r_1} \quad , \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{2m_1 g}{(3m_1 + 2m_2)r_2} \tag{L.9}$$

Die Gleichungen lassen sich leicht integrieren, die Lösungen sind proportional zu t^2.

Das Drehmoment auf Zylinder 1 ist $M = F r_1 = I_1 \ddot{\varphi}_1$, und die Kraft auf den Faden ist:

$$F = \frac{m_1 m_2}{3m_1 + 2m_2} g \tag{L.10}$$

Übung 3. *Fliehkraftregler*

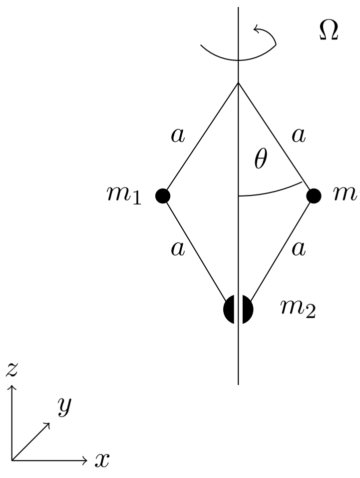
Hinweis: Der folgende Mechanismus wurde schon im 18. Jahrhundert benutzt, um Dampfmaschinen zu regeln. Ein an den Fliehkraftregler gekoppelter Hebel drosselt die Dampfzufuhr der Maschine, sodass die Drehzahl konstant gehalten wird. Auch bei den alten Telefonen mit Wählscheibe wurde ein ähnliches Prinzip benutzt, um die Wählscheibe mit konstanter Geschwindigkeit zurückzudrehen.

Der Fliehkraftregler besteht aus zwei masselosen Stangen der Länge a, die an einer Achse befestigt sind, welche sich mit Winkelgeschwindigkeit Ω dreht. Am Ende der Stangen befinden sich zwei identische Massen m_1. Diese sind mit zwei weiteren gelenkigen und masselosen Stangen der Länge a verbunden. An ihren Enden sitzt ein Reiter der Masse m_2, welcher sich reibungsfrei entlang der z-Achse bewegen kann (siehe Abbildung).

Gib die Lagrange-Funktion an und finde die Bewegungsgleichung. Welches sind die Gleichgewichtslösungen? Untersuche die Stabilität dieser Lösungen.

Lösung. Wir bezeichnen die Koordinaten der beiden Massen m_1 mit $(x_i, y_i, z_i)_{i=1,2}$ und diejenigen des Reiters mit (x_R, y_R, z_R). Sie lassen sich schreiben als

$$(x_1, y_1, z_1) = (a \sin\theta \cos\Omega t, a \sin\theta \sin\Omega t, -a\cos\theta)$$



$$(x_2, y_2, z_2) = (-a \sin\theta \cos\Omega t, -a \sin\theta \sin\Omega t, -a \cos\theta)$$

$$(x_R, y_R, z_R) = (0, 0, -2a \cos\theta)$$

Damit erhält man für die Lagrange Funktion

$$L = m_1 a^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2\theta) + 2m_2 a^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2 + 2ga(m_1 + m_2)\cos\theta.$$

Die entsprechende Bewegungsgleichung ist

$$\ddot{\theta}(m_1 + 2m_2 \sin^2\theta) + 2\dot{\theta}^2 m_2 \sin\theta\cos\theta + \sin\theta[\frac{g(m_1 + m_2)}{a} - m_1\Omega^2\cos\theta] = 0. \tag{L.11}$$

Gleichgewichtslösungen ($\theta = \text{const}$) ergeben sich also aus der Bedingung

$$\sin\theta \cdot \left(\cos\theta - \frac{g}{a\Omega^2}(1 + \frac{m_2}{m_1})\right) = 0.$$

Für $\Omega^2 \leq \frac{g}{a}(1 + \frac{m_2}{m_1})$ existiert nur eine Gleichgewichtslösung $\theta_1 = 0$, andernfalls kommt noch eine zweite Lösung $\theta_2 = \arccos \frac{g(m_1+m_2)}{am_1\Omega^2}$ hinzu. Die Stabilität lässt sich durch Linearisieren der Gleichung um θ_i untersuchen. Für θ_1 ist dies

$$\ddot{\theta} m_1 + \theta \left(\frac{g(m_1 + m_2)}{a} - m_1\Omega^2\right) = 0 \tag{L.12}$$

sodass sie im ersten Fall (mit nur einem Gleichgewicht) stabil ist wegen dem positiven Vorzeichen, im andern Fall instabil, da die Klammer dann negativ ist.

Mit den Additionstheoremen gilt für kleine θ:

$$\sin(\theta_2 + \theta) = \sin(\theta_2)\cos(\theta) + \cos(\theta_2)\sin(\theta) \approx \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)\theta \tag{L.13}$$

$$\cos(\theta_2 + \theta) = \cos(\theta_2)\cos(\theta) - \sin(\theta_2)\sin(\theta) \approx \cos(\theta_2) - \sin(\theta_2)\theta \tag{L.14}$$

sodass im zweiten Fall die Linearisierung um θ_2 so aussieht:

$$\ddot{\theta} m_1 (2m_2 \sin(\theta_2)^2) + \theta \sin(\theta_2)^2 m_1 \Omega^2 = 0 \tag{L.15}$$

Es ist daher ein stabiles Gleichgewicht.