Übung 1. *Beschleunigte Bewegung*

Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie lassen sich auch beschleunigte Bewegungen behandeln. Vorraussetzung ist lediglich, dass die Bezugssysteme, in denen die Berechnungen gemacht werden, Intertialsysteme sind. In dieser Aufgabe soll die Reise eines Raumschiffes berechnet werden, welches sich gleichmässig beschleunigt in x-Richtung bewegt. Das Raumschiff soll mit dem S'-System verbunden sein, der auf der Erde zurückbleibende Beobachter mit dem S-System.
Was heisst nun gleichmässig beschleunigt? Eine gleichförmige Beschleunigung im S-System würde nach endlicher Zeit zu Überlichtgeschwindigkeit führen. Es kann sich also nur um eine geichförmige Beschleunigung im sogenannten *momentanen Ruhesystem* des Raumschiffs handeln. Man nennt sie die Eigenbeschleunigung α. Das momentane Ruhesystem ist ein Bezugssystem, welches momentan die Geschwindigkeit des Raumschiffes hat, dabei aber unbeschleunigt ist. In diesem momentanen Intertialsystem S' soll für die infinitesimale Zeitdauer dt' die Geschwindigkeit des Raumschiffs verschwinden

$$\boldsymbol{u}' = (0, 0, 0).$$

(i) Nehme an, dass sich das S'-System mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$ relativ zum S-System bewegt. Im S'-System bewege sich ein Körper mit der konstanten Beschleunigung

$$\boldsymbol{a}' = (a'_x, 0, 0) = \left(\frac{du'_x}{dt'}, 0, 0\right).$$

Zeige, dass seine Beschleunigung in x-Richtung im S-System gleich

$$a_x = \frac{1}{\gamma^3 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^3}\, a'_x$$

ist.

(ii) Benutze das Resultat aus (i) um das relativistische Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz für die beschleunigte Rakete

$$u_x = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}} \tag{1}$$

herzuleiten.

(iii) Unterwerfe das obige Ergebnis Konsistenztests für kurze und lange Zeiten.

Lösung.

(i) Mit dem Additionsgesetz für Geschwindigkeiten und der Lorentz-Transformation folgt

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\frac{du_x}{dt'}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt'}\left[\frac{u'_x+v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}\right]}{\frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\left[\gamma(ct'+\beta x')\right]} = \frac{\frac{du'_x}{dt'}\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)-(u'_x+v)\frac{v}{c^2}\frac{du'_x}{dt'}}{\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)^2\gamma\left(\frac{dt'}{dt'}+\frac{1}{c}\beta\frac{dx'}{dt'}\right)}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)a'_x}{\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)^2\gamma\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)} = \frac{1}{\gamma^3\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)^3}\,a'_x.$$

(ii) Da die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}' = (0,0,0)$ des Raumschiffes verschwindet, folgt mit (i)

$$\boldsymbol{a}' = (a_x,0,0) = \left(\frac{1}{\gamma^3}\alpha,0,0\right).$$

In diesem Moment ist die Relativgeschwindigkeit zwischen S und S' gleich der Raumschiffgeschwindigkeit im S-System

$$v = u_x,$$

also folgt

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \left(1-\frac{u_x^2}{c^2}\right)^{3/2}\alpha. \tag{L.1}$$

Während der infinitesimalen Zeitdauer $dt' = dt/\gamma$ nimmt also die Geschwindigkeit des Raumschiffs im S-System um

$$du_x = \left(1-\frac{u_x^2}{c^2}\right)^{3/2}\alpha dt$$

zu. Für vergangene oder die nächste infinitesimale Zeitdauer dt' gilt natürlich dasselbe, also können wir integrieren

$$\int_0^{u_x}\frac{du_x}{(c^2-u_x^2)^{3/2}} = \frac{\alpha}{c^3}\int_0^t dt.$$

Das Ergebnis der Integration ist

$$\frac{u_x}{(c^2-u_x^2)^{1/2}} = \frac{\alpha}{c^3}t$$

$$u_x^2 = \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2(c^2-u_x^2)$$

$$u_x^2\left[1+\left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2\right] = (\alpha t)^2$$

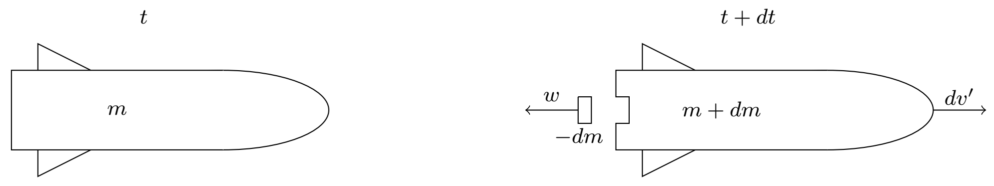
was schliesslich auf das relativistische Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz (1) führt.

(iii)
- Für sehr kurze Zeiten t gilt $\alpha t \ll c$. Damit strebt die Wurzel in erster Ordnung gegen 1 und es verbleibt $u_x \approx \alpha t$. Da dann aber auch γ in (L.1) in erster Ordnung gegen 1 strebt, ist $\alpha \approx a_x$ und damit $u_x = a_x t$. Das ist das bekannte nicht-relativistische Ergebnis.
- Für sehr lange Zeiten t ist der zweite Summand unter der Wurzel viel grösser als der erste, also $u_x \approx \alpha t/(\alpha t/c) = c$. Die Lichtgeschwindigkeit c wird also erreicht, aber nie überschritten.

Übung 2. *Relativistische Rakete*

Eine Rakete der Masse m_0 befindet sich zunächst in Ruhe bezgl. eines Inertialsystems. Sie beschleunigt dann geradlinig durch Ausstoss von Masse nach hinten mit konstanter Geschwindigkeit w in ihrem instantanen Ruhesystem. Die Bewegung ist relativistisch zu behandeln.

(i) Zeige, dass eine Veränderung $dm\,(< 0)$ der Masse der Rakete ihr im instantanen Ruhesystem die Geschwindigkeit $dv' = -(w/m)dm$ erteilt. Benutze dabei, dass $w^2, (dv')^2 \ll c^2$ und $|dm|, |dv'|$ klein.



(ii) Finde die verbliebene Masse m als Funktion der erzielten Geschwindigkeit v im Startsystem. Teste das Resultat anhand des nichtrelativistischen Grenzfalls

$$\frac{m}{m_0} = e^{-v/w} .$$

Hinweis: Wie gross ist in (i) der Zuwachs dv im Startsystem?

Lösung.

(i) Nicht die Masse, sondern der 4-er Impuls $p = (p^0, p^1, 0, 0) \equiv (p^0, p^1)$ ist beim Ausstoss der Masse $d\mu = -dm$ erhalten. Bzgl. des instantanen Ruhesystems vor dem Ausstoss ist vorher $\boldsymbol{p}_{\text{in}} = (cm, 0)$; und nachher

$$\boldsymbol{p}_{\text{fin}} = \frac{d\mu}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \begin{pmatrix} c \\ -w \end{pmatrix} + \frac{m + dm}{\sqrt{1 - (dv')^2/c^2}} \begin{pmatrix} c \\ dv' \end{pmatrix} . \tag{L.2}$$

Da $w^2, (dv')^2 \ll c^2$ und $|dm|, |dv'|$ klein, folgt

$$-wdm = mdv'. \tag{L.3}$$

(ii) Das instantante Ruhesystem der Rakete bewegt sich zum Zeitpunkt t (im Startsystem) mit Geschwindigkeit v bezüglich diesem Systems. Zum Zeitpunkt $t + dt$ hat sie im Ruhesystem die Geschwindigkeit dv'.

Wegen dem Additionsgesetz der Geschwindigkeiten ist bzgl. des Startsystems ihre Geschwindigkeit zum diesem Zeitpunkt gegeben durch

$$v + dv = \frac{v + dv'}{1 + \frac{vdv'}{c^2}} = v + \big(1 - \frac{v^2}{c^2}\big)dv' + \mathcal{O}((dv')^2), \tag{L.4}$$

also

$$-w\frac{dm}{m} = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{L.5}$$

und nach Integration von $v = 0$ nach v

$$-w \log \frac{m}{m_0} = \frac{c}{2} \log \frac{c+v}{c-v}, \tag{L.6}$$

d.h.

$$\frac{m}{m_0} = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{-c/2w}. \tag{L.7}$$

Die rechte Seite ist

$$\exp\Big(-\frac{c}{2w}\log\left[(c+v)/(c-v)\right]\Big) \tag{L.8}$$

und strebt im nichtrelativistischen Limes $v/c \to 0$ gegen $\exp(-v/w)$.

Übung 3. *Auto-Paradoxon*

Ein 4 m langes Auto fährt mit grosser Geschwindigkeit (mit Lorentzfaktor $\gamma = 2$), in eine Garage der Länge 3 m. Die Garage habe an ihren beiden Enden Tore, die zunächst geöffnet seien. Für einen Garagenwärter ist das Auto 2 m lang. Er urteilt, dass das Auto zwischenzeitlich mit seiner vollen Länge in die Garage passt. Aus Sicht des Autofahrers ist die Garage nur 1.5 m lang. Folglich urteilt er, dass sein Auto zu keinem Zeitpunkt in die Garage passt.

1. Erkläre, warum die Sichtweisen der beiden Beobachter kein Paradox darstellen. Zeichne dazu das Minkowski-Diagramm, in dem der Autofahrer über den Vorderrädern sitzt und sein Inertialsystem durch die (t', x')-Achsen gegeben ist. Das (t, x)-Bezugssystem ist das des Garagenwärters.

2. Der Garagenwärter urteilt, dass das Auto, nachdem es vollständig in der Garage verschwunden ist, 1 m Bremsweg hat bevor es an die Wand stösst. Sobald das Auto vollständig innerhalb der Garage verschwunden ist, werde deshalb in der Garage ein Bremsmechanismus ausgelöst, der auf die Vorder- und Hinterräder des Autos gleichermassen einwirkt und das Auto so zum Stehen bringt. Gleichzeitig wird das hintere Garagentor geschlossen. Das Auto befindet sich dann für alle Zukunft vollständig in der Garage. Der Autofahrer ist verwirrt über diesen Umstand, weil nach seinem Urteil das Auto bis zum Bremsmanöver mindestens 2.5 m aus der Garage herausragen muss. Er fürchtet, dass ihm das Garagentor das Heck zerstören könnte. Erkläre, warum diese Furcht unbegründet ist. Warum sollte sich der Autofahrer trotzdem Sorgen machen?
   Zeichne dafür ein weiteres Minkowski-Diagramm mit den Weltlinien des abgebremsten Hecks und der Front. Überlege dir, wann das Heck relativ zur Front aus der Sicht des Fahrers abgebremst wird.

3. Wie muss das Auto abgebremst werden, um eine Kompression zu vermeiden? Überlege dir zuerst, was passiert, wenn Heck und Front aus der Sicht des Fahrers gleichzeitig abgebremst werden. Warum funktioniert das nicht? Damit die Länge $L = 4m$ erhalten bleibt, muss also Heck und Front zu unterschiedlichen Zeitpunkten abgebremst werden. Um diesen Unterschied zu berechnen, lege den Koordinatenursprung in das abgebremste Heck und betrachte die Weltlinie der (ungebremsten) Front.

Lösung.

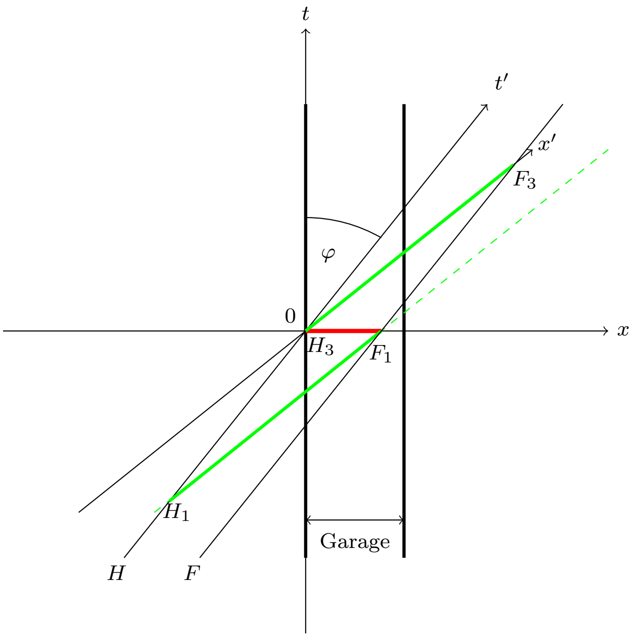


Abbildung 1: Mikowski-Digramm für Autoparadoxon

(i) Ausgedehnte Körper sind durch ein Kontinuum von *gleichzeitigen* Ereignissen definiert. Da Gleichzeitigkeit aber vom Bezugssystem abhängt, hängt auch die Auffassung darüber, welche Gestalt ein ausgedehnter Körper (z.B. das Auto) hat, vom Bezugssystem ab. Das Auto-Paradoxon wirkt nur dann paradox, wenn man den Begriff 'das Auto passt' für etwas Absolutes hält. Das ist auf Grund der Relativität der Gleichzeitigkeit nicht der Fall.

Abbildung 1 verdeutlicht dies. Sie zeigt die Weltlinien der Hinterräder (Heck H) und der Vorderräder (Front F). Der Autofahrer sitze über den Vorderrädern und sein Inertialsystem sei durch die (t', x')-Achsen gegeben. Das (t, x)-Bezugssystem ist das des Garagenwärters. Die vertikalen Linien stellen beide Garagentore dar. Die horizontale fette rote Linie stellt das Auto aus Sicht des Garagenwärters im Moment dar, wo es ganz in der Garage verschwindet. Für den Autofahrer in F_1 besteht sein Auto aber aus Ereignissen entlang der geneigten fetten grünen Linie zwischen H_1 und F_1. Dies wiederum sind für den Garagenwärter Ereignisse, die zu völlig verschiedenen Zeiten stattfinden.

Der Moment, in dem das Heck des Autos für den Autofahrer bei H_3 in der Garage verschwindet, ist für ihn gleichzeitig mit dem Ereignis F_3, wo Vorderräder die Garage längst wieder verlassen haben, falls das vordere Tor offen geblieben ist.

(ii) Das in der Aufgabe beschriebene Bremsmanöver werde beim Erreichen des Ereignisses F_1 eingeleitet. Abbildung 2 zeigt in blau die entsprechenden Weltlinien von Heck und Front. Nur für den Garagenwärter wird *gleichzeitig* das Vorder- und das Hinterrad abgebremst. Für den Autofahrer liegt das Heck im für ihn gleichzeitigen Ereignis H_1. Das Heck bleibt für ihn ungeberemst, aber dafür schliesst das Garagentor auch nicht, bis sein Heck den Punkt H_3 erreicht hat.

Der Autofahrer könnte hoffen, dass ihm die Stabilität des Autos hilft. Allerdings kann sich die Tatsache, dass die Vorderräder abgebremst werden, frühestens bei H_4 auf das Heck auswirken, da sich diese Wirkung maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann, unabhängig vom Material.

Das Heck bewegt sich also auch für den Autofahrer ungebremst bis zum Ereignis H_3. Um die entsprechende Zeit zu berechnen, bemerken wir, dass im System des Fahrers H_3 zum Zeitpunkt $t' = 0$ stattfindet. Die Zeit von F_1 erhält man durch die Koordinatentransformation 9.4.18 im

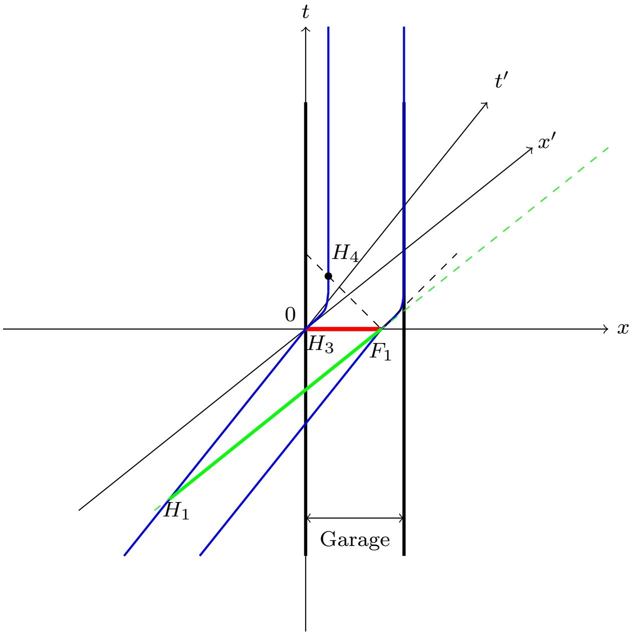


Abbildung 2: Weltlinien für gebremstes Heck und Front

Skript:

$$\begin{aligned} t' =& \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{xv}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ =& \gamma t - \frac{xv}{c^2}\gamma. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des Autos ergibt sich durch Auflösen von

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Weiter ist das Ereignis F_1 im Garagensystem gegeben durch $(t = 0, x = 2m)$. Einsetzen in die obige Formel ergibt $t' = -11.5ns$: dies ist die Zeit während der sich das Heck aus der Sicht des Autofahrers ungebremst bewegt.

(iii) Eine naheliegende Idee, um das Stauchen des Autos bei der Bremsung zu verhindern, ist, dass die Bremsung aus Sicht des Autofahrers an allen Teilen des Autos gleichzeitig erfolgen sollte. Dem ist nicht so, wie das in fett blau gezeichnete Bremsmanöver in Abbildung 3 veranschaulicht. Bei gleichzeitiger und gleichförmiger Bremsung der Vorder- und Hinterräder ist das Auto, nachdem es relativ zur Garage zur Ruhe gekommen ist, auf $\gamma L = 8\,m$ gestreckt ist, wenn es ursprünglich (aus Sicht des Autofahrers) die Länge L hatte.
Stattdessen muss der Autofahrer aus seiner Sicht die Hinterräder *nach* den Vorderrädern im Punkt H_2 abbremsen gemäss dem blau gestrichelten Bremsmanöver. Wir wollen nun die dafür notwendige Bremsverzögerung berechnen. Dazu legen den Koordinatenursprung des Garagenwärters und des Autofahrers in das Ereignis H_2, wo das Hinterrad gebremst wird. In diesem System ergibt sich Weltlinie der (ungebremsten) Vorderräder durch der Transformation von $x' = L$ (Weltlinie der Front im Ruhesystem des Autos) mit 9.4.18

$$\begin{aligned} x' =& \frac{x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - vt\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ =& \gamma x - \gamma vt. \end{aligned}$$

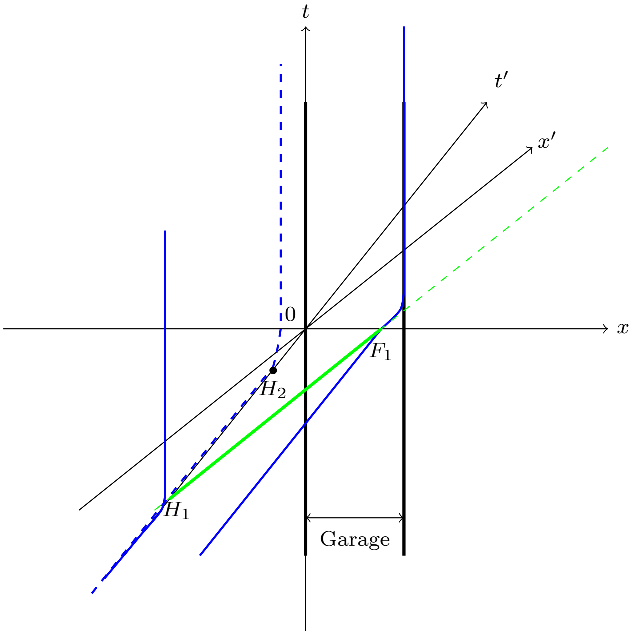


Abbildung 3: Weltlinien für gebremstes Heck und Front wenn entweder gleichzeitig aus der Sicht des Fahrers gebremst wird (fett blau), oder so gebremst wird, dass der Abstand ($4m$) erhalten bleibt (gestrichelt).

Also ist die Weltlinie der Front im Ruhesystem des Hecks gegeben durch

$$x_F(t) = \frac{1}{\gamma}x' + vt = \frac{1}{\gamma}L + vt.$$

Die Bremsung der Vorderräder muss eingeleitet werden, sobald $x_F(t_B) = L$, damit das Auto auch nach der Bremsung die Länge L hat. Daraus folgt

$$t_B = \frac{L}{v}\frac{\gamma - 1}{\gamma}.$$

Damit der Autofahrer weiss, wann die Bremsung der Front einzuleiten ist, müssen wir wieder in das bewegte System transformieren.

$$t_B = \frac{L}{v}\frac{\gamma - 1}{\gamma} \;\Rightarrow\; t'_B = \gamma(t_B - \frac{v}{c^2}x_F) = -7.6ns, \tag{L.9}$$

wobei man $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ durch Auflösen aus $\gamma = 2$ erhält.

Das hält aber zunächst nur Vorder- und Hinterräder im gleichen Abstand. Will man erreichen, dass die gesamte Karosserie keinerlei (lokale) Deformationen erleidet, dann muss man aus Sicht des Autofahrers gemäss (1) jeden einzelnen Teil der Karosserie um die individuelle Zeitspanne $t'_B(\delta L)$ vor den Hinterrädern abbremsen. Dabei ist δL der Abstand des Karosserieteils zum Heck im Ruhesystem des Autos.