Übung 1. *Hamilton–Jacobi Gleichungen*

Betrachte die gleiche Aufstellung wie in 8.1 : eine Punktmasse m bewegt sich aufgrund der Schwerkraft auf der Innenseite eines Kegels mit Öffnungswinkel 2θ. Leite die Bewegungsgleichungen her, einerseits über die Hamiltongleichungen, andererseits über die Hamilton-Jacobi-Gleichung. Vergleiche mit den Ergebnissen, welche über die Euler-Lagrange-Gleichungen erhalten werden.

Lösung.

- Via Hamilton-Gl.:
  Die Hamiltonfunktion ist (in Kugelkoordinaten mit Ursprung auf der Kegelspitze)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\big((m\dot{r})^2 + \frac{(mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)^2}{2mr^2\sin^2\theta}\big) + mgr\cos\theta = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + mgr\cos\theta. \tag{L.1}$$

  Die Hamilton-Gleichungen lauten:

$$\dot{r} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \tag{L.2}$$

$$\dot{p_r} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3\sin^2\theta} - mg\cos\theta, \tag{L.3}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}, \tag{L.4}$$

$$\dot{p_\varphi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} = 0. \tag{L.5}$$

  p_φ ist also erhalten. Aus den ersten zwei Gleichungen folgt

$$\ddot{r} = \frac{\dot{p_r}}{m} = \frac{p_\varphi^2}{m^2r^3\sin^2\theta} - g\cos\theta, \tag{L.6}$$

  in übereinstimmung mit dem Resultat aus den Euler-Lagrange-Gln.

- Via Hamilton-Jacobi-Gl.:
  Anfangspunkt ist die gleiche Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + mgr\cos\theta. \tag{L.7}$$

  Es muss nun die kanonische Transformation

$$(r, p_r, \varphi, p_\varphi) \rightarrow (Q, P, T, E) \tag{L.8}$$

$$\mathcal{H}(r, p_r, \varphi, p_\varphi) = \overline{\mathcal{H}}(Q, P, T, E) = E \tag{L.9}$$

  gefunden werden, wodurch die Hamilton-Gleichungen trivial lösbar werden:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P} = 0\,, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q} = 0\,, \tag{L.10}$$

$$\dot{T} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial E} = 1\,, \qquad \dot{E} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial T} = 0\,. \tag{L.11}$$

Die erzeugende Funktion $S(q, P)$ dieser Transformation muss dann die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} = p_i \quad (i = r, \varphi)\,, \tag{L.12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P} = Q = konst\,, \tag{L.13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial E} = T = t + t_0 \quad (t_0 = konst)\,. \tag{L.14}$$

Die Hamiltonfunktion wird nun zu

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varphi})^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + mgr\cos\theta. \tag{L.15}$$

Mit dem Separationsansatz

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1(\varphi, P) + \mathcal{S}_2(r, P, E) \tag{L.16}$$

reduziert sich das Problem auf

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial \varphi}\right)^2 = P^2, \tag{L.17}$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial r}\right)^2 = 2m\left(E - \frac{P^2}{r^2\sin^2\theta} - mgr\cos\theta\right), \tag{L.18}$$

wobei die erste Gleichung in der zweiten eingesetzt wurde. Dies ergibt

$$\mathcal{S}_1(\varphi, P) = P\varphi, \tag{L.19}$$

$$\mathcal{S}_2(r, P, E) = \int \frac{dr}{r}\left(2mr^2E - \frac{P^2}{\sin^2\theta} - 2m^2gr^3\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}} \tag{L.20}$$

Die Bewegungsgleichungen sind somit

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial E} = 2m\int r dr\left(2mr^2E - \frac{P^2}{\sin^2\theta} - 2m^2gr^3\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} - t = konst_1, \tag{L.21}$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P} = \frac{2}{\sin^2\theta}\int \frac{dr}{r}\left(2mr^2E - \frac{P^2}{\sin^2\theta} - 2m^2gr^3\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} + \varphi = konst_2. \tag{L.22}$$

Übung 2. *Trägheitsmoment*

Eine dünne quadratische Platte mit Seitenlänge a rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse, welche durch das Zentrum der Platte geht und bezüglich dessen Normalen um einen Winkel θ geneigt ist.

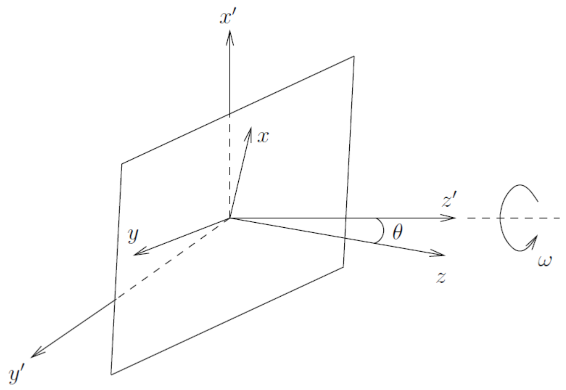
(i) Bestimme die Hauptträgheitsmomente

(ii) Bestimme den Drehimpuls im Inertialsystem

(iii) Bestimme das Drehmoment, das auf die Achse ausgeübt wird.

Lösung.

(i) Sei der Koordinatenursprung im Schwerpunkt der Platte. Für den Körperfesten Koordinatensystem nehmen wir an, dass die Platte sich in der xy-Ebene befindet, mit den x- und- y-Achsen parallel zu den Seiten. Die z-Achse ist entlang der Normalen der Platte orientiert und bildet einen Winkel θ mit der z'-Achse des Laborsystems, um die die Platte rotiert (siehe Bild). Wir nehmen weiter an, dass die x-, z- und z'-Achse koplanar sind.



Aufgrund der Symmetrie sind dann die x-, y- und z-Achsen die Hauptträgheitsachsen um O. Der Trägheitstensor ist dann:

$$\Theta_{ij} = \int dm(y)\big(y^2\delta_{ij} - y_i y_j\big) \tag{L.23}$$

$$=\rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy_1 dy_2 \big((y_1^2+y_2^2)\delta_{ij} - \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1y_2 & 0 \\ y_2y_1 & y_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\big). \tag{L.24}$$

Mit

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy_1 dy_2 y_1^2 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy_1 dy_2 y_2^2 = \frac{a^4}{12} \qquad , \qquad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy_1 dy_2 y_1 y_2 = 0 \tag{L.25}$$

ergibt sich

$$\Theta_{ij} = m \begin{pmatrix} \frac{a^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{6} \end{pmatrix}, \tag{L.26}$$

wobei m die Masse der Platte ist.

(ii) Der Drehimpuls $\mathbf{L}$ im körperfesten Koordinatensystem ist

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega\sin\theta \\ 0 \\ \omega\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12}\omega\sin\theta \\ 0 \\ \frac{ma^2}{6}\omega\cos\theta \end{pmatrix} \tag{L.27}$$

Man kann das Laborsystem so wählen, dass bei $t = 0$ die y- und y'-Achse übereinstimmen. Es gilt dann folgende Beziehung zwischen den Einheitsvektoren beider Bezugssysteme:

$$\mathbf{e_x} = \cos\theta\cos\omega t\mathbf{e_{x'}} + \cos\theta\sin\omega t\mathbf{e_{y'}} + \sin\theta\mathbf{e_{z'}} \tag{L.28}$$

$$\mathbf{e_y} = -\sin\omega t\mathbf{e_{x'}} + \cos\omega t\mathbf{e_{y'}} \tag{L.29}$$

$$\mathbf{e_z} = -\sin\theta\cos\omega t\mathbf{e_{x'}} - \sin\theta\sin\omega t\mathbf{e_{y'}} + \cos\theta\mathbf{e_{z'}} \tag{L.30}$$

Somit ist der Drehimpuls im Laborsystem gegeben durch

$$\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} L_{x'} \\ L_{y'} \\ L_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\omega t & -\sin\omega t & -\sin\theta\cos\omega t \\ \cos\theta\sin\omega t & \cos\omega t & -\sin\theta\sin\omega t \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12}\omega\sin\theta \\ 0 \\ \frac{ma^2}{6}\omega\cos\theta \end{pmatrix} \tag{L.31}$$

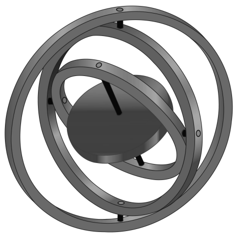
$$= \begin{pmatrix} -\frac{ma^2}{12}\omega\sin\theta\cos\theta\cos\omega t \\ -\frac{ma^2}{12}\omega\sin\theta\cos\theta\sin\omega t \\ \frac{ma^2}{12}\omega(1+\cos^2\theta) \end{pmatrix} \tag{L.32}$$

(iii) Das Drehmoment auf der Achse im Laborsystem ist gegeben durch

$$\mathbf{M}' = \frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12}\omega^2 \sin\theta\cos\theta\sin\omega t \\ -\frac{ma^2}{12}\omega^2 \sin\theta\cos\theta\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{L.33}$$

Übung 3. *Foucaultscher Kreiselkompass*

Ein Gyroskop (Kreisel) sei mit seinem Schwerpunkt im Zentrum Cardanischer Ringe (siehe Bild) befestigt, so dass auf ihn kein Gravitationsmoment wirkt. Zusätzlich wird die Figurenachse gezwungen, sich nur in der horizontalen Ebene zu bewegen. Wir versetzen das Gyroskop auf der Erdoberfläche in schnelle Drehung um seine Figurenachse (d.h. die Hauptachse mit kleinstem Trägheitsmoment), wobei die Drehachse in Richtung des Meridians (d.h. in Richtung auf den Nordpol) gerichtet ist. Wegen der Rotationsbewegung der Erde führt jedoch das Gyroskop eine zusätzliche Drehbewegung aus. Zeige mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen (unter der Annahme das die Kreisfrequenz des Gyroskops gross im Vergleich zur Erddrehung ist), dass die Figurenachse symmetrisch um den Meridian schwingt, und somit als Kompass verwendet werden kann. *[Hinweis: Überlege Dir zunächst, was auf dem Äquator passiert. Dann verallgemeinere Deine Analyse für einen Punkt beliebiger Breite.]*



Lösung. Wir betrachten zunächst erst einmal die vereinfachte Situation in der sich der Kreiselkompass auf dem Äquator befindet. Wähle eine ortsfeste Parametriesierung (x, y, z) mit x entlang vom Äquator, y entlang des Meridians und z senkrecht zur Erdoberfläche. Die Bewegung des Kompass sei auf die xy-Ebene beschränkt. Der Kreisel drehe sich mit $\dot{\psi}$ um seine Figurenachse (Θ_3) dessen Orientierung in xy durch ϕ beschrieben werde.

Durch die Drehung der Erde erzeugt die Äquatorialkomponente $(L_x = L_3 \cos\phi)$ des Drehimpulses ein Drehmoment

$$M_z = L_3 \cos\phi \; \Omega \tag{L.34}$$

wobei Ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, und $L_3 = \Theta_3\dot{\psi}$ der Drehimpuls um die Figurenachse ist. Auch der Drehimpuls[1] $L_z = \Theta_1\dot{\phi}$ entlang z erzeugt ein Drehmoment

$$M_x = L_z\Omega \tag{L.35}$$

dessen Projektion $M_x \cos\phi$ auf L_3 wirkt. Somit erhalten wir ein System von Bewegungsgleichungen der Form

$$\dot{L}_3 = L_z \cos\phi \; \Omega \tag{L.36}$$

$$\dot{L}_z = L_3 \cos\phi \; \Omega \tag{L.37}$$

[1] Hier wird $\Theta_1 = \Theta_2$ ein entartetes Trägheitsmoment senkrecht zur Figurenachse angenommen.

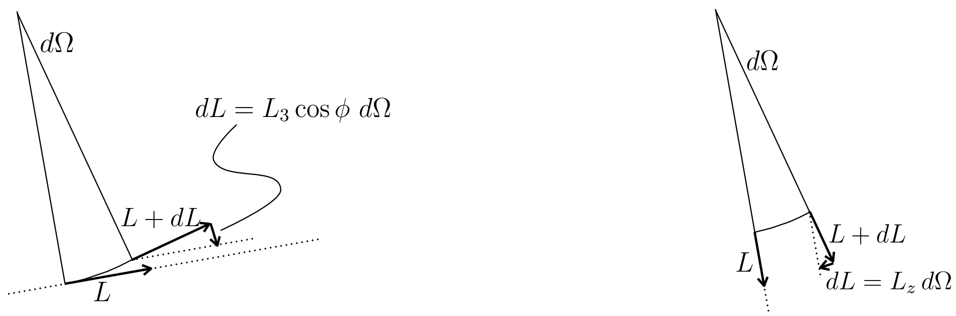


Abbildung 1: Links: Änderung des Drehimpulses entlang des Äquators. Rechts: Änderung des Drehimpulses senkrecht zur Erdoberfläche.

und somit

$$\Theta_1 \dddot{\phi} = \Theta_1 \dot{\phi} \cos^2\phi \; \Omega^2 - \Theta_3 \dot{\psi} \; \sin\phi \; \dot{\phi} \; \Omega \tag{L.38}$$

Da wir angenommen haben, dass der Kreisel schnell um die Figurenachse dreht, dürfen wir obige Gleichungen vereinfachen mit $\dot{\psi} = \omega_3 = \text{const}$. Aus den Gleichungen (**??**) und (**??**) ergibt somit sich statt (**??**),

$$\ddot{\phi} = -\frac{\Theta_3 \omega_3 \Omega}{\Theta_1} \cos\phi \tag{L.39}$$

Weiter gilt für kleine Auslenkungen $\chi = \pi/2 - \phi$ vom Meridian,

$$\ddot{\chi} = -\omega_{FA}^2 \chi \tag{L.40}$$

wobei $\omega_{FA} = (\Theta_3 \omega_3 \Omega / \Theta_1)^{1/2}$ die Oszillationsfrequenz der Figurenachse um den Meridian beschreibt.

Falls sich der Kreiselkompass nicht am Äquator sondern bei einer georaphischen Breite β befindet, sieht man leicht, dass sich obige Überlegungen übertragen lassen und die Kreisfrequenz für die Oszillation der Figurenachse durch

$$\omega_{FA} = \sqrt{\frac{\Theta_3 \omega_3 \Omega \cos\beta}{\Theta_1}} \tag{L.41}$$

gegeben ist.