Übung 1. *Kanonische Transformation*

Gegeben sei die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

1. Berechne die Bewegungsgleichung für $q(t)$ und $p(t)$ und löse sie.
2. Zeige, dass die Transformation
$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \\ p &= \sqrt{2Pm\omega}\cos Q \end{aligned} \tag{1}$$
eine kanonische Transformation ist.
3. Berechne die Bewegungsgleichung für $Q(t)$ und $P(t)$ und vergleiche mit a) durch Einsetzen in (1).

Lösung.

1. Aus $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ bekommen wir $p = m\dot{q}$ und aus $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ bekommen wir $\dot{p} = -m\omega^2 q$. Durch nochmaliges Ableiten von $\dot{p}$ und Einsetzen erhalten wir $\ddot{p} = -\omega^2 p$ mit der Lösung
$$p(t) = a\cos(wt + b).$$
Daraus erhalten wir auch
$$q(t) = \frac{a}{m\omega}\sin(wt + b).$$
2. Um zu zeigen, dass dies eine kanonische Transformation ist genügt es zu zeigen, dass $A^T \epsilon A = \epsilon$, wobei
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\cos Q & \frac{1}{\sqrt{2Pm\omega}}\sin Q \\ -\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q & \frac{1}{\sqrt{2Pm\omega}}\cos Q \end{pmatrix}$$
die Jacobi-Matrix ist und
$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Durch Ausführen der Matrix Multiplikationen sieht man, dass $A^T \epsilon A = \epsilon$ erfüllt ist.
3. Die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten ist
$$H(Q,P) = \frac{1}{2m}\left(\frac{2P}{m\omega}\sin^2 Q\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(2Pm\omega\cos^2 Q\right) = \omega P.$$
Die zugehörigen Bewegunsgleichungen
$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega\ , \qquad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$
haben die Lösung
$$Q(t) = \omega t + Q_0\ , \qquad P(t) = P_0\ .$$

Durch Einsetzen erhalten wir nun

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}} \sin(wt + Q_0) \\ p(t) &= \sqrt{2P_0 m\omega} \cos(wt + Q_0) \end{aligned} \tag{L.1}$$

was die selbe Lösung ist wie in a) für $a = \sqrt{2P_0 m\omega}$ und $b = Q_0$.

Übung 2. *Erhaltungsgrössen*

Der Poissonsche Satz (S. 88), welcher direkt aus der Jacobi-Identitẗ folgt, besagt, dass die Poissonklammer zweier Erhaltungsgrössen wieder eine Erhaltungsgrösse ist, dass also gilt:

$$\{F, H\} = \{G, H\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\{F, G\}, H\} = 0 \tag{2}$$

Wende dies auf die Komponenten des Drehimpulses bzw. des Impulses an, um Folgendes zu zeigen:

(a) Wenn zwei Komponenten des Drehimpulses erhalten sind, dann gilt das auch für die dritte Komponente. Berechne dazu die Poissonklammer $\{L_i, L_j\}$ und zeige, dass

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k. \tag{3}$$

Lösung. Die i-te Komponente des Drehimpulses ist gegeben durch $L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k$. Mit einer weiteren Komponente $L_l = \epsilon_{lmn} x_m p_n$ können wir die Poissonklammer wie folgt schreiben

$$\{L_i, L_l\} = \sum_\alpha \left(-\frac{\partial L_i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial L_l}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial L_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L_l}{\partial p_\alpha} \right).$$

Die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_i}{\partial p_\alpha} &= \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha} = \epsilon_{ijk} x_j \delta_{\alpha k} \\ \frac{\partial L_i}{\partial x_\alpha} &= \epsilon_{ijk} p_k \frac{\partial x_j}{\partial x_\alpha} = \epsilon_{ijk} p_k \delta_{\alpha j} \\ \frac{\partial L_l}{\partial p_\alpha} &= \epsilon_{lmn} x_m \frac{\partial p_n}{\partial p_\alpha} = \epsilon_{lmn} x_m \delta_{\alpha n} \\ \frac{\partial L_l}{\partial x_\alpha} &= \epsilon_{lmn} p_n \frac{\partial x_m}{\partial x_\alpha} = \epsilon_{lmn} p_n \delta_{\alpha m}. \end{aligned}$$

Wir bekommen nun

$$\begin{aligned} \{L_i, L_l\} &= \sum_\alpha \left(-\frac{\partial L_i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial L_l}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial L_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L_l}{\partial p_\alpha} \right) \\ &= \sum_\alpha \left(-\epsilon_{ijk} x_j \delta_{\alpha k} \epsilon_{lmn} p_n \delta_{\alpha m} + \epsilon_{ijk} p_k \delta_{\alpha j} \epsilon_{lmn} x_m \delta_{\alpha n} \right) \\ &= \left(-\epsilon_{ijk} \epsilon_{lkn} x_j p_n + \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmj} x_m p_k \right) \end{aligned}$$

Mit zyklischen Vertauschen der Indizes des ϵ-Tensors und unter Verwendung der Formel

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

erhalten wir

$$\{L_i, L_l\} = -(\delta_{in}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jn})x_j p_n + (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})x_m p_k.$$

Der 2. und 4. Term dieser Gleichung heben sich auf und wir erhalten

$$\begin{aligned}\{L_i, L_l\} &= (\delta_{im}\delta_{nl} - \delta_{in}\delta_{ml})x_m p_n \\ &= \epsilon_{kil}\epsilon_{kmn}x_m p_n \\ &= \epsilon_{ilk}L_k,\end{aligned}$$

wobei wir die Indizes umbenannt haben. Sind z.B. L_1 und L_2 Erhaltungsgrössen, so ist auch $\epsilon_{12k}L_k = L_3$ eine Erhaltungsgrösse.

(b) Wenn zwei Komponenten des Drehimpulses und eine Komponente des Impulses erhalten sind, dann ist der gesamte Impuls erhalten.

Lösung. Man geht analog wie in (a) vor:

$$\{L_i, p_j\} = \sum_\alpha \left(-\frac{\partial L_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_j}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial L_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial p_j}{\partial p_\alpha} \right) \tag{L.2}$$

Wegen $\frac{\partial p_j}{\partial x_\alpha} = 0$ und $\frac{\partial p_j}{\partial p_\alpha} = \delta_{j\alpha}$ für alle α, ist das einfach

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varepsilon_{ilk}x_l p_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}p_k \tag{L.3}$$

Sind L_1 und L_2 erhalten, so gilt das nach (a) auch für L_3. Wenn jetzt oBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) p_1 erhalten ist, dann auch $-\{L_2, p_1\} = p_3$. Das selbe gilt für $-\{L_1, p_3\} = p_2$.

Hierbei ist ε_{ijk} das Levi-Civita-Symbol, welches u.a. die Eigenschaft hat, dass $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$. Man kann z.B. das Kreuzprodukt zweier Vektoren als $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k$ schreiben. Beachte ausserdem, dass wir hier annehmen, dass über doppelt auftretende Indizes summiert wird.

Übung 3. *Symplektische Geometrie*

1. Lese das Kapitel 6.5 über Symplektische Geometrie im Skript (S. 82-84).
2. (*) Gegeben sei eine n-Form F im 3-dimensionalen Raum mit euklidischer Metrik $g_{ij} = \delta_{ij}$. Berechne die äussere Differentiation dF für $n = 0, 1, 2$.
   - n=0 Hier ist F nur eine skalare Funktion. Zeige, dass $dF = \operatorname{grad} F$, wobei $\operatorname{grad} F$ als Vektor in der Basis $e^i = dx^i$ des Kotangentialraumes aufgefasst werden kann.
   - n=1 Zeige, dass man dF als $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ schreiben kann, wobei $\mathbf{F}$ ein Vektor in der Basis $e^i = dx^i$ ist und $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ ein Vektor in der Basis $f^i = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}dx^j \wedge dx^k$ des 3-dimensionalen Vektorraumes der alternierenden 2-Formen ist.
   - n=2 Zeige, dass man dF als $\operatorname{div}\mathbf{F}$ schreiben kann, wobei $\mathbf{F}$ ein Vektor in der Basis $f^i = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}dx^j \wedge dx^k$ ist und $\operatorname{div}\mathbf{F}$ ein Vektor im 1-dimensionalen Raum der alternierenden 3-Formen mit der Basis $s = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ ist.

Hinweis. Benutze Gleichung (6.5.8) im Skript für den Fall, dass φ eine 0-Form ist:

$$d(\varphi \wedge \psi) = d(\varphi\psi) = d\varphi \wedge \psi + \varphi \wedge d\psi \qquad (\varphi \text{ ist 0-Form})$$

Weiterhin gilt, dass zweimaliges Anwenden von d immer Null ergibt.

Lösung.

- F ist 0-Form. In diesem Fall ist F eine skalare Funktion und wir haben

$$dF = (\partial_i F)\, dx^i = \mathrm{grad}\, F.$$

- F ist 1-Form. Mit der Basis der 1-Form $e^i = dx^i$ haben wir

$$F = F_i\, dx^i,$$

wobei F_i eine skalare Funktion (0-Form) ist. Durch Anwenden von d auf F bekommen wir

$$\begin{aligned} dF &= d(F_i dx^i) \\ &= dF_i \wedge dx^i + F_i \wedge \underbrace{d(dx^i)}_{=0} \\ &= \partial_j F_i\; dx^j \wedge dx^i \end{aligned} \tag{L.4}$$

In der Basis der 2-Form, $f^i = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk} dx^j \wedge dx^k$, wobei ϵ_{ijk} das Levi-Civita-Symbol ist, können wir (L.4) wie folgt schreiben:

$$dF = \epsilon_k{}^{ji} \partial_j F_i\; f^k = \mathrm{rot}\, F$$

- F ist 2-Form. Wieder schreiben wir F in der Basis der 2-Form

$$F = F_i f^i,$$

wobei die F_i skalare Funktionen (0-Formen) sind. Wir bekommen nun

$$\begin{aligned} dF &= d(F_i f^i) \\ &= dF_i \wedge f^i + F_i \wedge \underbrace{d(f^i)}_{=0} \\ &= \partial_j F_i\; dx^j \wedge f^i \\ &= \partial_j F_i\; \underbrace{dx^j \wedge (\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{kl} dx^k \wedge dx^l)}_{=\delta^{ij}\ s} \\ &= \partial_i F^i\; s, \end{aligned} \tag{L.5}$$

wobei $s = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ die 1-dimensionale Basis der 3-Form ist. Wir können s weglassen und erhalten

$$dF = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x^i} = \mathrm{div}\, F.$$

3. (*) Wie im Skript erwähnt, gilt in kontrahierbaren Gebieten das Lemma von Poincaré. Zeige damit folgende Aussagen:

- Aus div $\mathbf{B} = 0$ folgt, dass ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ existiert, sodass $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}$.
- Aus rot $\mathbf{E} = 0$ folgt, dass ein Skalarfeld φ existiert, sodass $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\ \varphi$.

Hinweis: φ und $\mathbf{A}$ sind (Vektor-)Potentiale, welche man in der Elektrodynamik verwenden kann, um Felder zu beschreiben. Beachte ausserdem, dass der Raum in gewöhnlichen physikalischen Systemen zwar meist kontrahierbar ist, aber durchaus auch Gegenbeispiele existieren. Dies lsst sich z.B. beim Aharonov–Bohm-Effekt beobachten.

Lösung. Wie im Skript (S. 84) erklärt gilt: Eine Differentialform φ nennt man geschlossen, falls $d\varphi = 0$. Eine solche Differentialform ist sicherlich geschlossen, falls es eine Differentialform ψ (deren Grad um eins niedriger ist als jener von φ ist) gibt, so dass $\varphi = d\psi$. (Denn dann gilt $d\varphi = d^2\psi = 0$.)

- Der infinitesmale magnitische Fluss B ist eine 2-Form. Gegeben ist, dass $dB = 0$. Daher gibt es eine 1-Form A für die gilt: $B = dA$. Somit ist $B = dA = \operatorname{rot} A$.
- Das infinitesmale elektische Feld E ist eine 1-Form und wir haben $dE = 0$. Daher gibt es ein 0-Form φ für die gilt: $E = d\varphi$. Somit haben wir $E = d\varphi = \operatorname{grad} \varphi$. Das minuszeichen auf dem Aufgabenblatt ist nur Konvention.