Übung 1. *Galilei-Gruppe*

Zeige, dass die Galilei-Transformationen

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{b}, \qquad \big(R \in O(3),\ \mathbf{v}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\big) \tag{1}$$

$$t' = \pm t + a, \qquad \big(a \in \mathbb{R}\big) \tag{2}$$

eine Gruppe bilden.

Lösung. Zu zeigen sind:

- Abgeschlossenheit bezüglich Verknüpfung
- Assoziativität der Verknüpfung
- Existenz des Einselements
- Existenz des Inversen

Seien g_1, g_2 zwei Galileitransformationen gegeben durch

$$g_1 = (R_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{b}_1, a_1, \lambda_1), \tag{L.1}$$

$$g_2 = (R_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{b}_2, a_2, \lambda_2). \tag{L.2}$$

g_1 angewendet auf $(\mathbf{x}, t)$ ist

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{b} \tag{L.3}$$

$$t' = \lambda t + a, \tag{L.4}$$

und durch Anwendung von g_2 auf $(\mathbf{x}', t')$ folgt

$$g_2 \circ g_1 = (\underbrace{R_2 R_1}_{\in O(3)}, \underbrace{R_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\lambda_1}_{\in \mathbb{R}^3}, \underbrace{R_2\mathbf{b}_1 + \mathbf{v}_2 a_1 + \mathbf{b}_2}_{\in \mathbb{R}^3}, \underbrace{\lambda_2 a_1 + a_2}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\lambda_2\lambda_1}_{\in \{\pm 1\}}), \tag{L.5}$$

was die Abgeschlossenheit der Gruppe zeigt. Die Assoziativität folgt aus der Assoziativität der beteiligten Gruppen. Das Einselement ist

$$e = (id, 0, 0, 0, 1), \tag{L.6}$$

und das Inverse erhält man durch lösen des Gleichungssystems $g^{-1} \circ g = 1$,

$$g^{-1} = (R^{-1}, -\lambda R^{-1}\mathbf{v}, \lambda a R^{-1}\mathbf{v} - R^{-1}\mathbf{b}, -\lambda a, \lambda). \tag{L.7}$$

Übung 2. *Galileiinvarianz*

Betrachte ein mechanisches System von N Massenpunkten im $\mathbb{R}^3$, dessen Galilei-invariantes Kraftgesetz von der Form

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} V(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)\ , \qquad i = 1, \ldots, N\ , \tag{3}$$

ist.

(a) Betrachte den Fall zweier ($N = 2$) Massepunkte, die zur Anfangszeit in Ruhe sind. Zeige, dass die Bewegung der beiden Punkte in der Geraden verläuft, die die Anfangslagen enthält.

Lösung. Nach Voraussetzung genügt eine rotierte oder gespiegelte mechanische Bahn wieder derselben Bewegungsgleichung, was zur Folge hat, dass sie selbst eine mechanische Bahn ist. Die Anfangsbedingungen $(\boldsymbol{x}_i(0) = \boldsymbol{a}_i,\ \dot{\boldsymbol{x}}_i(0) = 0)_{i=1}^2$ bestimmen eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ (die, die durch $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ geht); sie sind invariant unter Drehungen um diese Gerade. Die gedrehte Bahn genügt also denselben Anfangsbedingungen wie die ursprüngliche und ist somit mit ihr identisch. Es folgt, dass sie in der Geraden enthalten sein muss.

(b) Wie sieht die entsprechende Behauptung für drei ($N = 3$) Massepunkte aus?

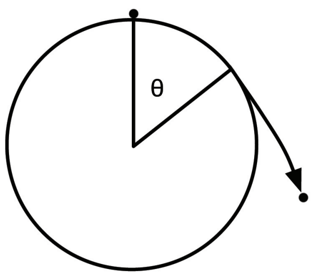
Lösung. Die Anfangsbedingungen $(\boldsymbol{x}_i(0) = \boldsymbol{a}_i,\ \dot{\boldsymbol{x}}_i(0) = 0)_{i=1}^3$ bestimmen eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ (die, die durch $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{a}_3$ geht); sie sind invariant unter Spiegelungen an dieser Ebene. Daraus folgt, dass auch die dazugehörige mechanische Bahn invariant unter solchen Transformationen ist, und deshalb in der Ebene enthalten sein muss.

(c) Zeige, dass man für zwei Massepunkte (die zur Anfangszeit nicht notwendigerweise in Ruhe sind) immer ein Inertialsystem finden kann, in dem die Bewegung in einer Ebene verläuft.

Lösung. Es gibt eine Galileitransformation, die den zweiten (oBdA) Massenpunkt im Zeitnullpunkt in Ruhe bringt (welche?). In diesem Inertialsystem lauten die Anfangsbedingungen $(\boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{a}_1,\ \dot{\boldsymbol{x}}_1(0) = \boldsymbol{v})$ und $(\boldsymbol{x}_2(0) = \boldsymbol{a}_2,\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(0) = 0)$, und bestimmen eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ (die, die durch $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ geht und $\boldsymbol{v}$ enthält); sie sind invariant unter Spiegelungen an dieser Ebene. Daraus folgt, dass auch die dazugehörige mechanische Bahn invariant unter solchen Transformationen ist, und deshalb in der Ebene enthalten sein muss.

Übung 3. *Newton'sche Mechanik*

Ein Massenpunkt befindet sich exakt auf dem Nordpol einer Kugel. Ein "infinitesimaler Stoss" (Impulsübertrag durch Stoss kann vernachlässigt werden) lässt den Massenpunkt reibungsfrei die Kugeloberfläche hinuntergleiten. Unter welchem Azimutwinkel θ hebt der Massenpunkt von der Kugeloberfläche ab?



Bemerkung: Später in der Vorlesung werden wir den "Lagrange-Formalismus" kennenlernen. Mit diesem lässt sich diese Übung sehr viel einfacher lösen.

Lösung. Der Massenpunkt hebt dann von der Kugel ab, wenn die Normalkraft F_n, mit welcher die Masse auf die Unterlage gedrückt wird, kleiner ist, als die Zentripetalkraft F_z, welche nötig ist, um die Masse auf eine Kreisbahn

zu zwingen.
Für $F_n(\theta)$ erhält man

$$F_n(\theta) = mg\cos\theta.$$

Die Zentripetalkraft $F_z(\theta)$ erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned}
E_{pot} &= (\cos\theta - 1)rmg \\
\Rightarrow E_{kin} &= (1 - \cos\theta)rmg \\
\Rightarrow v^2 &= 2(1 - \cos\theta)rg \\
\Rightarrow F_z(\theta) &= 2(1 - \cos\theta)mg
\end{aligned}$$

Aus $F_z(\theta_0) = F_n(\theta_0)$ erhält man

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48^\circ.$$