Übung 1. *Legendretransformation*

Sei $f(x)$ eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f''(x) > 0$ (strikt konvex). Die Legendretransformation von $f(x)$ ist durch

$$(\mathcal{L}f)(y) = y\,\xi(y) - f(\xi(y))$$

definiert, wobei $\xi(y) = (f')^{-1}(y)$, d.h. $y = f'(\xi(y))$.

(i) Berechne die Legendretransformierte für die Funktionen

$$f_1(x) = e^x \ , \qquad f_2(x) = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{a^2}{4} \ .$$

(ii) Zeige, dass für eine strikt konvexe Funktion f die Legendretransformierte die Eigenschaft

$$(\mathcal{L}f)''(y) > 0$$

besitzt, wobei hier die beiden Ableitungen bezüglich y genommen werden.

(iii) Wegen (ii) kann man also die Legendretransformierte von $\mathcal{L}f$ bilden. Zeige, dass für eine strikt konvexe Funktion die Legendretransformation eine Involution ist, d.h. dass $\mathcal{L}(\mathcal{L}f) = f$.

Übung 2. *Vergleich numerischer Lösungsverfahren*

In dieser Aufgabe vergleichen wir drei numerische Verfahren, um Differentialgleichungen der Form $\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ zu lösen, wobei $\boldsymbol{q} = (q^1, q^2, ..., q^n)^T$ und q^j die j-te Lagekoordinate ist. Definiere nun $t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$, $\boldsymbol{q}_i := \boldsymbol{q}(t_i)$ und $\dot{\boldsymbol{q}}_i := \dot{\boldsymbol{q}}(t_i)$. Die Verfahren sind[1]:

- Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}}_{i+1} &= \dot{\boldsymbol{q}}_i + \Delta t \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}_i, \dot{\boldsymbol{q}}_i, t_i), \\ \boldsymbol{q}_{i+1} &= \boldsymbol{q}_i + \Delta t \cdot \dot{\boldsymbol{q}}_i. \end{aligned} \tag{1}$$

- Leapfrog-Verfahren:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}}_{i+1/2} &= \dot{\boldsymbol{q}}_{i-1/2} + \Delta t \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}_i, t_i), \\ \boldsymbol{q}_{i+1} &= \boldsymbol{q}_i + \Delta t \cdot \dot{\boldsymbol{q}}_{i+1/2}. \end{aligned} \tag{2}$$

  Beachte, dass dieses Verfahren nur mit DGl der Form $\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}, t)$ benutzt werden kann.

[1] Siehe z.B. das Skript der Vorlesung "Numerische Methoden" für mehr Details: `http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/nm_pc`

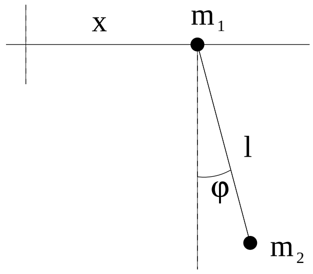

Abbildung 1: Ebenes Pendel

- 4. Ordnung Runge-Kutta-Verfahren:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}_1 &= \Delta t \cdot \boldsymbol{F_u}(\boldsymbol{u}_i, t_i) \\ \boldsymbol{k}_2 &= \Delta t \cdot \boldsymbol{F_u}\left(\boldsymbol{u}_i + \frac{\boldsymbol{k}_1}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ \boldsymbol{k}_3 &= \Delta t \cdot \boldsymbol{F_u}\left(\boldsymbol{u}_i + \frac{\boldsymbol{k}_2}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ \boldsymbol{k}_4 &= \Delta t \cdot \boldsymbol{F_u}(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{k}_3, t_i + \Delta t) \\ \boldsymbol{u}_{i+1} &= \boldsymbol{u}_i + \frac{1}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 2(\boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3) + \boldsymbol{k}_4) \end{aligned} \tag{3}$$

  wobei

$$\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F_u}(\boldsymbol{u}, t) := \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Betrachte nun zuerst einen harmonischen Oszillator mit Federkonstante α^2.

(a) Finde die Lagrangefunktion, die Bewegungsgleichung und deren exakte Lösung.

(b) Löse die Bewegungsgleichung numerisch mit den gegebenen Verfahren. Benutze z.B. die Parameter/Randbedingungen $\omega = \sqrt{(\alpha^2/m)} = 2$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $\Delta t = 0.1$.

(c) Überprüfe die Stabilität der Lösungen: vergleiche dazu direkt die numerischen Lösungen mit der exakten Lösung und überprüfe, wie gut jeweils die Energie erhalten wird.

Betrache als nächstes das Pendel von Serie 6 Aufgabe 3 (Abbildung 1).

(d) Zeige, dass die Bewegungsgleichung wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \sin\theta \frac{l\dot{\phi}^2 + g\cos\phi}{\mu - \cos^2\phi}, \\ \ddot{\phi} &= -\sin\theta \frac{l\dot{\phi}^2\cos\phi + \mu g}{l\,(\mu - \cos^2\phi)}, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei $\mu = 1 + m_1/m_2$.

(e) Löse die Bewegungsgleichungen numerisch mit Euler- und Runge-Kutta-Verfahren. Benutze dazu zum Beispiel folgende Parameter und Randbedingungen: $\mu = 5$, $l = 2$, $g = 10$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\varphi(0) = 3\pi/4$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ und $\Delta t = 0.05$.

Hinweis: Benutze die Datei `ex_9_2.py` (Webpage der Vorlesung) und implementiere die fehlenden Funktionen.