Übung 1. *Beschleunigte Bewegung*

Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie lassen sich auch beschleunigte Bewegungen behandeln. Vorraussetzung ist lediglich, dass die Bezugssysteme, in denen die Berechnungen gemacht werden, Intertialsysteme sind. In dieser Aufgabe soll die Reise eines Raumschiffes berechnet werden, welches sich gleichmässig beschleunigt in x-Richtung bewegt. Das Raumschiff soll mit dem S'-System verbunden sein, der auf der Erde zurückbleibende Beobachter mit dem S-System.
Was heisst nun gleichmässig beschleunigt? Eine gleichförmige Beschleunigung im S-System würde nach endlicher Zeit zu Überlichtgeschwindigkeit führen. Es kann sich also nur um eine geichförmige Beschleunigung im sogenannten *momentanen Ruhesystem* des Raumschiffs handeln. Man nennt sie die Eigenbeschleunigung α. Das momentane Ruhesystem ist ein Bezugssystem, welches momentan die Geschwindigkeit des Raumschiffes hat, dabei aber unbeschleunigt ist. In diesem momentanen Intertialsystem S' soll für die infinitesimale Zeitdauer dt' die Geschwindigkeit des Raumschiffs verschwinden

$$\boldsymbol{u}' = (0, 0, 0).$$

(i) Nehme an, dass sich das S'-System mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$ relativ zum S-System bewegt. Im S'-System bewege sich ein Körper mit der konstanten Beschleunigung

$$\boldsymbol{a}' = (a'_x, 0, 0) = \left(\frac{du'_x}{dt'}, 0, 0\right).$$

Zeige, dass seine Beschleunigung in x-Richtung im S-System gleich

$$a_x = \frac{1}{\gamma^3 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^3} \; a'_x$$

ist.

(ii) Benutze das Resultat aus (i) um das relativistische Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz für die beschleunigte Rakete

$$u_x = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}} \tag{1}$$

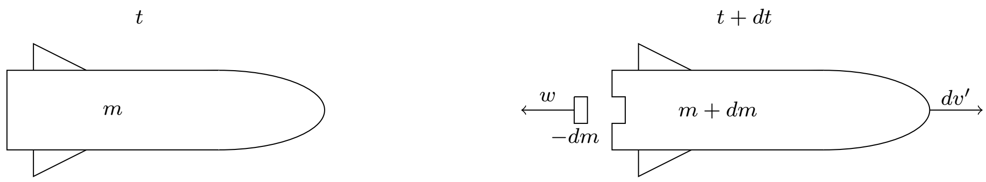
herzuleiten.

(iii) Unterwerfe das obige Ergebnis Konsistenztests für kurze und lange Zeiten.

Übung 2. *Relativistische Rakete*

Eine Rakete der Masse m_0 befindet sich zunächst in Ruhe bezgl. eines Inertialsystems. Sie beschleunigt dann geradlinig durch Ausstoss von Masse nach hinten mit konstanter Geschwindigkeit w in ihrem instantanen Ruhesystem. Die Bewegung ist relativistisch zu behandeln.

(i) Zeige, dass eine Veränderung $dm\,(< 0)$ der Masse der Rakete ihr im instantanen Ruhesystem die Geschwindigkeit $dv' = -(w/m)dm$ erteilt. Benutze dabei, dass $w^2, (dv')^2 \ll c^2$ und $|dm|, |dv'|$ klein.



(ii) Finde die verbliebene Masse m als Funktion der erzielten Geschwindigkeit v im Startsystem. Teste das Resultat anhand des nichtrelativistischen Grenzfalls

$$\frac{m}{m_0} = e^{-v/w}\,.$$

Hinweis: Wie gross ist in (i) der Zuwachs dv im Startsystem?

Übung 3. *Auto-Paradoxon*

Ein 4 m langes Auto fährt mit grosser Geschwindigkeit (mit Lorentzfaktor $\gamma = 2$), in eine Garage der Länge 3 m. Die Garage habe an ihren beiden Enden Tore, die zunächst geöffnet seien. Für einen Garagenwärter ist das Auto 2 m lang. Er urteilt, dass das Auto zwischenzeitlich mit seiner vollen Länge in die Garage passt. Aus Sicht des Autofahrers ist die Garage nur 1.5 m lang. Folglich urteilt er, dass sein Auto zu keinem Zeitpunkt in die Garage passt.

1. Erkläre, warum die Sichtweisen der beiden Beobachter kein Paradox darstellen. Zeichne dazu das Minkowski-Diagramm, in dem der Autofahrer über den Vorderrädern sitzt und sein Inertialsystem durch die (t', x')-Achsen gegeben ist. Das (t, x)-Bezugssystem ist das des Garagenwärters.

2. Der Garagenwärter urteilt, dass das Auto, nachdem es vollständig in der Garage verschwunden ist, 1 m Bremsweg hat bevor es an die Wand stösst. Sobald das Auto vollständig innerhalb der Garage verschwunden ist, werde deshalb in der Garage ein Bremsmechanismus ausgelöst, der auf die Vorder- und Hinterräder des Autos gleichermassen einwirkt und das Auto so zum Stehen bringt. Gleichzeitig wird das hintere Garagentor geschlossen. Das Auto befindet sich dann für alle Zukunft vollständig in der Garage. Der Autofahrer ist verwirrt über diesen Umstand, weil nach seinem

Urteil das Auto bis zum Bremsmanöver mindestens 2.5 m aus der Garage herausragen muss. Er fürchtet, dass ihm das Garagentor das Heck zerstören könnte. Erkläre, warum diese Furcht unbegründet ist. Warum sollte sich der Autofahrer trotzdem Sorgen machen?
Zeichne dafür ein weiteres Minkowski-Diagramm mit den Weltlinien des abgebremsten Hecks und der Front. Überlege dir, wann das Heck relativ zur Front aus der Sicht des Fahrers abgebremst wird.

3. Wie muss das Auto abgebremst werden, um eine Kompression zu vermeiden? Überlege dir zuerst, was passiert, wenn Heck und Front aus der Sicht des Fahrers gleichzeitig abgebremst werden. Warum funktioniert das nicht? Damit die Länge $L = 4m$ erhalten bleibt, muss also Heck und Front zu unterschiedlichen Zeitpunkten abgebremst werden. Um diesen Unterschied zu berechnen, lege den Koordinatenursprung in das abgebremste Heck und betrachte die Weltlinie der (ungebremsten) Front.