Allgemeine Mechanik
Übungsblatt 12.

HS 2013
Prof. R. Renner

Übung 1. *Hamilton-Jacobi Gleichungen*

Ein geladenes Teilchen bewegt sich in der Ebene unter dem Einfluss eines zentralen Potentials $k\ r^2/2$ und eines konstanten magnetischen Feldes $\vec{B}$ senkrecht zur Ebene, so dass das Vektorpotential $\vec{A}$ gegeben ist durch

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{x}. \tag{1}$$

(i) Berechne den Lagrangian von diesem System in polaren Koordinaten.

(ii) Berechne die kanonischen Impulse p_r und p_θ und finde den Hamiltonian.

(iii) Stelle die zeitabhängige Hamilton-Jacobi Gleichungen auf. Benutze dazu die zeitabhängige Funktion $S = S(q, P, t)$ wie im Skript in Kapitel 7.3 erklärt.

Übung 2. *Eiegenschaften des Trägheitstensors*

Der Trägheitstensor eines starren Körpers bezüglich des Punktes $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ist definiert als

$$\Theta^{\boldsymbol{x}}_{jk} = \int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2\delta_{jk} - (x_j - y_j)(x_k - y_k)] \quad (j,k = 1,2,3)\,, \tag{2}$$

wobei $m(\boldsymbol{y})$ die Massenverteilung des Körpers ist, und δ_{jk} das Kronecker-Delta beschreibt.

(i) Sei nun der Trägheitstensor $\Theta^{\boldsymbol{0}}_{jk}$ eines starren Körpers bezüglich des Schwerpunktes $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ bekannt. Zeige den Steinerschen Satz

$$\Theta^{\boldsymbol{a}}_{jk} = \Theta^{\boldsymbol{0}}_{jk} + M(\boldsymbol{a}^2\delta_{jk} - a_j a_k) \quad (j,k = 1,2,3)\,, \tag{3}$$

wobei $\Theta^{\boldsymbol{a}}_{jk}$ der Trägheitstensor bezüglich des Punktes $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ist und $M = \int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})$ die Gesamtmasse des Körpers bezeichnet.

Hinweis: Benutze die Definition des Schwerpunktes.

(ii) Zeige, dass die Diagonaleinträge des Trägheitstensors unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems stets der folgenden Gleichung genügen:

$$\Theta_{11} + \Theta_{22} \geq \Theta_{33}\,, \tag{4}$$

und analog bei beliebiger Vertauschung der Indizes. Wann gilt Gleichheit, d.h. $\Theta_{11} + \Theta_{22} = \Theta_{33}$?

Übung 3. ***Der schlafende Kreisel***

Wir betrachten eine spezielle Lösung eines schweren symmetrischen Kreisels, nämlich die Lösung wo $\theta(t) = 0 = \text{const.}$ und $\dot{\psi}(t) = \text{const.}$ Das entspricht der Konfiguration, in der der Kreisel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um seine Figurenachse rotierend aufrecht steht. Im Folgenden verwenden wir die gleiche Notation und die gleichen Konventionen wie im Kapitel 8.4 im Skript, insbesondere sind (ϕ, θ, ψ) die Eulerschen Winkel des starren Körpers (siehe Abb. 1). Damit beschreibt ϕ die Präzession, θ die Nutation und ψ die Rotation um die Figurenachse des Kreisels.

(i) Verifiziere, dass es sich bei der gegebenen Konfiguration tatsächlich um eine Lösung der Bewegungsgleichungen handelt. Benutze dazu die relevanten Gleichungen aus dem Skript.

Hinweis: Was ist die Rolle von ϕ resp. $\dot{\phi}$ in diesem speziellen Fall? Abb. 1 könnte hilfreich sein.

(ii) Diese Lösung hat nur dann physikalische Bedeutung, wenn sie gegenüber kleinen Störungen von aussen stabil ist (d.h. "wenn der schlafende Kreisel durch kleine Störungen nicht aufwacht"). Zeige, dass dies für $\omega > \omega_0$ der Fall ist, wobei ω die anfängliche Winkelgeschwindigkeit der Kerisels in seine 3-Richtung ist, und finde ω_0. Wie kann man damit die in der Realität auftretende Bewegung eines Kreisels erklären?

Hinweis: Eintwickle Gl. (8.4.13) im Skript für kleine θ und leite daraus eine Differentialgleichung her, mit welcher du die Frage nach der Stabilität beantworten kannst. Was ist die Relation zwischen M_z und M_3 für $\theta = 0$? Beachte, dass hier M_z und M_3 Drehimpulse und nicht Drehmomente sind.

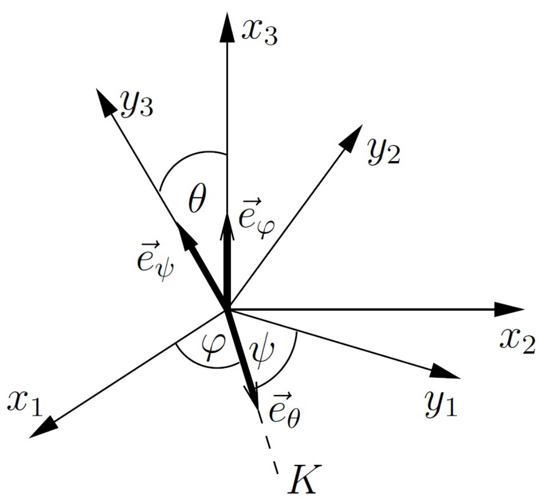

Abbildung 1: Laborsystem (x_1, x_2, x_3) und körperfestes System (y_1, y_2, y_3) mit den Eulerwinkeln (ϕ, θ, ψ).