Übung 1. *Kanonische Transformation*

Gegeben sei die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

1. Berechne die Bewegungsgleichung für $q(t)$ und $p(t)$ und löse sie.
2. Zeige, dass die Transformation

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \\ p &= \sqrt{2Pm\omega}\cos Q \end{aligned} \tag{1}$$

   eine kanonische Transformation ist.

3. Berechne die Bewegungsgleichung für $Q(t)$ und $P(t)$ und vergleiche mit a) durch Einsetzen in (1).

Übung 2. *Erhaltungsgrössen*

Der Poissonsche Satz (S. 88), welcher direkt aus der Jacobi-Identiẗt folgt, besagt, dass die Poissonklammer zweier Erhaltungsgrössen wieder eine Erhaltungsgrösse ist, dass also gilt:

$$\{F,H\} = \{G,H\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\{F,G\},H\} = 0 \tag{2}$$

Wende dies auf die Komponenten des Drehimpulses bzw. des Impulses an, um Folgendes zu zeigen:

(a) Wenn zwei Komponenten des Drehimpulses erhalten sind, dann gilt das auch für die dritte Komponente. Berechne dazu die Poissonklammer $\{L_i, L_j\}$ und zeige, dass

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k. \tag{3}$$

(b) Wenn zwei Komponenten des Drehimpulses und eine Komponente des Impulses erhalten sind, dann ist der gesamte Impuls erhalten.

Hierbei ist ε_{ijk} das Levi-Civita-Symbol, welches u.a. die Eigenschaft hat, dass $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$. Man kann z.B. das Kreuzprodukt zweier Vektoren als $(\vec{a}\times\vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k$ schreiben. Beachte ausserdem, dass wir hier annehmen, dass über doppelt auftretende Indizes summiert wird.

Übung 3. ***Symplektische Geometrie***

1. Lese das Kapitel 6.5 über Symplektische Geometrie im Skript (S. 82-84).

2. (*) Gegeben sei eine n-Form F im 3-dimensionalen Raum mit euklidischer Metrik $g_{ij} = \delta_{ij}$. Berechne die äussere Differentiation dF für $n = 0, 1, 2$.

   - <u>n=0</u> Hier ist F nur eine skalare Funktion. Zeige, dass $dF = \operatorname{grad} F$, wobei $\operatorname{grad} F$ als Vektor in der Basis $e^i = dx^i$ des Kotangentialraumes aufgefasst werden kann.
   - <u>n=1</u> Zeige, dass man dF als $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ schreiben kann, wobei $\mathbf{F}$ ein Vektor in der Basis $e^i = dx^i$ ist und $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ ein Vektor in der Basis $f^i = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk} dx^j \wedge dx^k$ des 3-dimensionalen Vektorraumes der alternierenden 2-Formen ist.
   - <u>n=2</u> Zeige, dass man dF als $\operatorname{div} \mathbf{F}$ schreiben kann, wobei $\mathbf{F}$ ein Vektor in der Basis $f^i = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk} dx^j \wedge dx^k$ ist und $\operatorname{div} \mathbf{F}$ ein Vektor im 1-dimensionalen Raum der alternierenden 3-Formen mit der Basis $s = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ ist.

   *Hinweis. B*enutze Gleichung (6.5.8) im Skript für den Fall, dass φ eine 0-Form ist:

   $$d(\varphi \wedge \psi) = d(\varphi\psi) = d\varphi \wedge \psi + \varphi \wedge d\psi \qquad (\varphi \text{ ist 0-Form})$$

   Weiterhin gilt, dass zweimaliges Anwenden von d immer Null ergibt.

3. (*) Wie im Skript erwähnt, gilt in kontrahierbaren Gebieten das Lemma von Poincaré. Zeige damit folgende Aussagen:

   - Aus $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ folgt, dass ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ existiert, sodass $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$.
   - Aus $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ folgt, dass ein Skalarfeld φ existiert, sodass $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

   Hinweis: φ und $\mathbf{A}$ sind (Vektor-)Potentiale, welche man in der Elektrodynamik verwenden kann, um Felder zu beschreiben. Beachte ausserdem, dass der Raum in gewöhnlichen physikalischen Systemen zwar meist kontrahierbar ist, aber durchaus auch Gegenbeispiele existieren. Dies lsst sich z.B. beim Aharonov–Bohm-Effekt beobachten.