Blatt VI

`Abgabe: 01.11.2012`

Aufgabe 1 [*Keine stabile Gleichgewichtslage*]: Zeige, dass eine Gleichgewichtslage $\mathbf{x}_0$ eines geladenen Teilchens (Ladung e, Masse m) in einem äusseren, *zeitlich konstanten* elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, d.h. $\mathbf{E}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, im Vakuum instabil ist.

Hinweise:

(i) Es gilt $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, wobei das elektrische Potential ϕ die Poisson Gleichung $\Delta\phi = 0$ erfüllt.

(ii) Schreibe die linearisierte Bewegungsgleichung um dem Punkt $\mathbf{x}_0$ in der Form $\dot{\mathbf{z}} = A\,\mathbf{z}$ (vgl. Skript Kapitel 4.1).

(iii) Die Hesse-Matrix des Potentials $H_{ij}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ ist diagonalisierbar. Finde die Eigenwerte und Eigenvektoren von A in Abhängigkeit vom Eigenspektrum der Hesse-Matrix.

(iv) Zum Beweis der Instabilität nehme vereinfachend an, dass die Hesse-Matrix des Potentials ungleich Null ist.

Aufgabe 2 [*Minimale Rotationsfläche*]: Wir erzeugen eine Rotationsfläche dadurch, dass wir eine Kurve, die durch zwei feste Endpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht, um die y-Achse rotieren lassen (Abb. 1), wobei $0 < x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$. Bestimme diejenige Kurve $y(x)$, für welche die Oberfläche minimal wird.

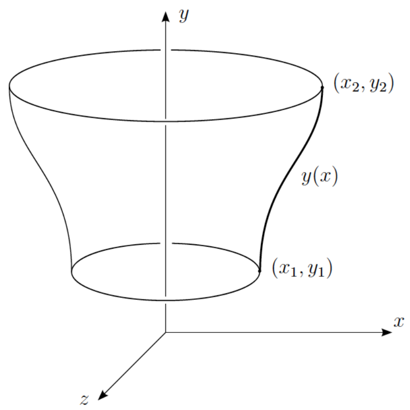

Abbildung 1: Rotationsfläche um y-Achse.

Hinweis: Berechne zuerst die Oberfläche A als Funktion der Kurve $y(x)$ und wende dann das Extremalprinzip auf das Funktional $A[y(x)]$ an. Da das Problem invariant unter Translation in y-Richtung ist, vereinfacht die dazugehörende Erhaltungsgrösse das Lösen der entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichung.

Aufgabe 3 [*Lagrange'scher Multiplikator*]: Ein Berg, dessen Topographie durch die einfache Formel

$$z(x,y) = \frac{h_0}{1 + (x/x_0)^2 + (y/y_0)^2}$$

gegeben ist, hat offensichtlich die Höhe h_0. Über ihn führt ein Weg, dessen Projektion in die durch $z = 0$ definierte Ebene durch $xy = x_0 y_0$ gegeben ist.

(i) Bestimme den höchsten Punkt des Weges mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatormethode.

(ii) Erläutere die Methode geometrisch anhand der Vorstellung, dass am höchsten Punkt des Weges die Höhenlinien und der Weg die gleiche Richtung haben müssen.

Hinweis: Zur Bestimmung der Extrema $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ einer Funktion $f(\mathbf{x})$ unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$ muss die Langrange'sche Prinzipialfunktion $f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x})$ minimiert werden. λ wird als Langrange'scher Multiplikator bezeichnet.