Blatt V

Abgabe: 25.10.2012

Aufgabe 1 [*Gekoppelte Pendel*]: Wir betrachten ein System aus zwei gleichen mathematischen Pendeln der Länge $l_1 = l_2 = l$ mit Massen $m_1 = m_2 = m$ im Schwerefeld mit Erdbeschleunigung g. Die Pendel bewegen sich beide in einer Ebene, und der Auslenkungswinkel der Pendel relativ zur Vertikalen wird mit q_1 und q_2 (kleine Auslenkungen!) bezeichnet. Weiterhin sind die Pendel durch eine masselose Feder gekoppelt, deren Länge gleich dem Abstand der Aufhängepunkte ist. Definiere $\omega_g^2 = g/l$ und $\omega_f^2 = f/m$.

(i) Bestimme die beiden Eigenschwingungen des Systems.

(ii) Zur Zeit $t = 0$ seien die Pendel in Ruhe. Dann wird eines der beiden Pendel mit der Geschwindigkeit $\dot{q}_1 = v$ angestossen. Zeige, dass sich das erste Pendel nach einer gewissen Zeit T, die bestimmt werden soll, beinahe in Ruhe befindet, und dass alle Energie zum zweiten übergegangen ist.

Hinweis: (i) Zeige, dass die Federkraft auf Masse m_1 für kleine Auslenkungen $-fl(q_1 - q_2)$ ist. (ii) Hier soll man annehmen, dass die Federkonstante f klein ist, und die trigonometrische Identität $\sin(a) + \sin(b) = 2\cos(\frac{a-b}{2})\sin(\frac{a+b}{2})$ benutzen.

Aufgabe 2 [*Zyklische Kette*]: Gegeben sei eine zyklische Kette von N gleichen Massepunkten auf einem Kreis, die durch gleiche Federn mit Federkonstante f verbunden sind (siehe Abbildung 1). Wir bezeichnen die Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage durch $(x_1, \ldots, x_N)$.

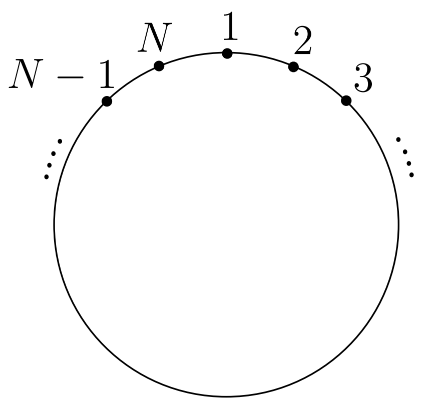

Abbildung 1: Zyklische Kette

(i) Bestimme die Bewegungsgleichungen des Systems.

(ii) Die Kette besitzt die zyklische Symmetrie, unter der

$$S : (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_N, x_1)$$

abgebildet wird. Die Eigenschwingungen des Systems können daher als Schwingungen der verschiedenen Eigenvektoren von S aufgefasst werden. Bestimme die N verschiedenen Eigenvektoren von S, d.h. die Vektoren $\mathbf{e}_k \in \mathbb{C}^N$ für die $S\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$ ist.

(iii) Zeige dann, dass für $(x_1, \ldots, x_N) = u_k \mathbf{e}_k$ die in (i) bestimmen Bewegungsgleichungen sich zu

$$\ddot{u}_k = -\omega_k^2 u_k$$

vereinfachen. Bestimme die Eigenfrequenzen ω_k.

(iv) Beschreibe die Eigenschwingung, die zu $\lambda = 1$ gehört geometrisch. Falls N gerade ist, ist auch $\lambda = -1$ ein Eigenwert. Beschreibe in diesem Fall die Eigenschwingung mit $\lambda = -1$ geometrisch.

(v) *(fakultativ)* Gegeben sei nun eine zyklische Kette von N Teilchen mit alternierenden Massen m_o und m_e, verbunden durch Federn gleicher Stärke f. Bestimme die Eigenfrequenzen und stelle sie graphisch dar. Vergleiche die Lösung mit dem zuvor beschriebenen Fall $m_o = m_e$.

Hinweis zu (v): *Die Symmetrie des Systems ist nun reduziert: Was ist die Symmetrie? Zeige, dass die Symmetrieeigenwerte zu den Vektoren* $\mathbf{e}_k$ *und* $\mathbf{e}_{N/2+k}$ *identisch sind. Benutze als Ansatz für eine Eigenschwingung eine Linearkombination von* $\mathbf{e}_k$ *und* $\mathbf{e}_{N/2+k}$.

Aufgabe 3 [*Stabilität einer Kreisbahn*]: Ein Teilchen bewege sich auf einer Kreisbahn unter dem Einfluss einer Zentralkraft, die vom Zentrum des Kreises ausgeht und von einem Potential $V(r)$ herrührt. Untersuche die Bewegung des Teilchens, wenn es geringfügig aus seiner Gleichgewichtsbahn ausgelenkt wird.

(i) Führe dazu Differenz-Koordinaten $\rho = r - r_0$ und $\phi = \theta - \omega t$ ein, wobei r_0 der Radius der Kreisbahn und ω die Gleichgewichts-Kreisfrequenz ist. Bestimme die Bewegungsgleichungen zu linearer Ordnung in den Differenz-Koordinaten.

(ii) Sei nun das Potential von der Form $V(r) = -kr^{-n+1}$. Zeige, dass stabile Schwingungen auftreten, falls $n < 3$.

Hinweis: (i) Entwickle die radiale Bewegungsgleichung und die Gleichung für die Drehimpulserhaltung in linearer Ordnung in den Differenz-Koordinaten. Entwickle insbesondere das Potential $V(r)$ *um* $r = r_0$. *(ii) Bestimme einen Zusammenhang zwischen* ω^2 *und* $V'(r_0)$ *und benutze diesen. Was ist die Bedingung für eine stabile Schwingung?*