

Blatt II

Abgabe: 04.10.2012

Aufgabe 1 [*Bewegungsgleichung mit Scheinkräften*]: Bezüglich des Inertialsystems S bewege sich ein freies Teilchen gleichförmig entlang der Bahn $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}t$, wobei $\mathbf{v} = (0, v_0, 0)$. Berechne die Bewegung dieses Teilchens aus der Perspektive eines relativ zu S gedrehten Koordinatensystems S' , wobei

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachte dazu die beiden Fälle, (i) $\phi = \phi_0$ konstant, und (ii) $\phi = \omega t$, wobei ω konstant ist. Im zweiten Fall, zeige, dass die resultierende Bahnkurve in S' die Bewegungsgleichungen (inkl. Scheinkräfte) löst.

Aufgabe 2 [*Foucault'sches Pendel*]: Betrachte ein Foucault'sches Pendel mit Fadenlänge l an einem Ort mit geographischer Breite ϕ . Die Beschreibung des Pendels soll wie im Kapitel *Freier Fall auf der Erdoberfläche* der Vorlesung im Koordinatensystem mit Ursprung P und Koordinatenachsen \mathbf{y} erfolgen.

- (i) Zeige, dass die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ des Massenpunktes zu führender Ordnung in $\omega \ll \sqrt{g/l}$

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\frac{g}{l}\mathbf{y} + 2\omega \sin \phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}$$

ist, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation sei.

- (ii) Für $t = 0$ sei $\dot{\mathbf{y}} = 0$. Wie gross ist die Periode τ des Pendels? ($\tau/2 > 0$ ist die kleinste Zeit für die gilt $\dot{\mathbf{y}}(\tau/2) = 0$). Wovon hängt diese ab?
- (iii) Sei die Anfangsbedingung wie in (ii). Mit welcher Periode dreht sich das Pendel in der Schwingungsebene? Wovon hängt diese ab?

Anleitung: Starte mit den Bewegungsgleichungen eines frei fallenden Körpers im erdfesten Koordinatensystem (P, \mathbf{y}) (gemäss Vorlesung). Die Gravitation kann im gegebenen Fall als homogen angenommen werden, und die Bewegung der Erde um

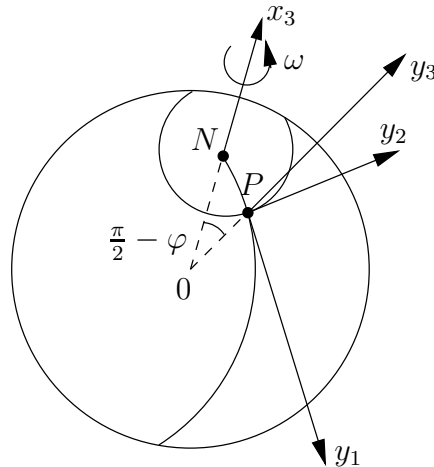


Abbildung 1: Darstellung des \mathbf{y} -Koordinatensystems für das Foucault'sches Pendel.

die Sonne wird vernachlässigt. Füge die Zwangskraft des Fadens hinzu und entwickle diese zur ersten Ordnung im Auslenkungswinkel α .

Fasse die zwei Variablen (y_1, y_2) mittels der komplexen Größe $\zeta = y_1 + iy_2$ zusammen, und löse die resultierende Differentialgleichung, welche Ähnlichkeiten mit einer gedämpften Oszillatorgleichung aufweist. Nutze einen geeigneten Ansatz. Die Ergebnisse der Teilaufgaben (ii) und (iii) sind unabhängig von den Anfangsbedingungen.

Aufgabe 3 [Raketen]: Raketen werden durch den Impuls der ausgestossenen Gase angetrieben. Da diese Gase Reaktionsprodukte des Treibstoffes sind, ist die Masse der Rakete nicht konstant, sondern nimmt im selben Mass ab, wie der Treibstoff verbraucht wird.

- (i) Wie modifiziert sich die Bewegungsgleichung $\dot{v}(t) = -g$ für eine Rakete, die in einem homogenen Gravitationsfeld (bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes) senkrecht nach oben geschossen wird und dabei Gase mit einer Geschwindigkeit v_{Gas} (relativ zur Rakete) ausstösst.
- (ii) Integriere diese Gleichung und bestimme damit v als Funktion der Zeit t , wobei der Massenverlust proportional zur Zeit sein soll.
- (iii) Für eine gegebene Austrittsgeschwindigkeit v_{Gas} , bestimme ein Kriterium welches entscheidet ob die Rakete überhaupt abheben wird.