Blatt XIII

Abgabe: 20.12.2012

Aufgabe 1 [*Addition von relativistischen Geschwindigkeiten*]: Die Lorentztransformation $\Lambda^x(v)$, die zwei Inertialsysteme mit Relativgeschwindigkeit v in x-Richtung miteinander verbindet, sei gegeben durch $\Lambda^x(v) : (t, x, y, z) \mapsto (\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ mit

$$\hat{t} = \gamma(t - \beta x/c), \qquad \hat{x} = \gamma(x - \beta ct), \qquad \hat{y} = y, \qquad \hat{z} = z$$

wobei $\beta(v) \equiv v/c$ und $\gamma(\beta) \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

(i) Zeige explizit, dass die sukzessive Anwendung zweier solcher Lorentzboosts in x-Richtung $\Lambda_1^x(v_1) : (t, x) \mapsto (\hat{t}, \hat{x})$ und $\Lambda_2^x(v_2) : (\hat{t}, \hat{x}) \mapsto (\tilde{t}, \tilde{x})$ wiederum einen Lorentzboost $\Lambda_{12}^x(v_{12}) = \Lambda_2^x(v_2)\Lambda_1^x(v_1)$ in x-Richtung ergibt. Bestimme die zugehörige Geschwindigkeit $v_{12}(v_1, v_2)$ als Funktion von v_1 und v_2.

(ii) Betrachte nun den Fall der Hintereinanderschaltung eines Lorentzboosts $\Lambda_1^x(v_1)$ in x-Richtung, und eines Lorentzboosts $\Lambda_2^y(v_2)$ in y-Richtung. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung dieser beiden Lorentzboosts $\Lambda_2^y\Lambda_1^x$ als Hintereinanderschaltung eines Boosts bzgl. eines gedrehten Koordinatensystems $(R_1^z)^{-1}\Lambda_{12}^x(v_{12})R_1^z$ und einer anschliessenden Rotation um die z-Achse $R_{12}^z(\phi_{12})$ geschrieben werden kann. Was sind nun Richtung ϕ_{12} und Betrag v_{12} der Relativgeschwindigkeit?

Hinweise: Zeige in einem ersten Schritt, dass das Transformationsverhalten der Zeit $\tilde{t}(t, x, y)$ durch eine Rotation $R_1^z(\phi_1)$ und einen Boost $\Lambda_{12}^x(v_{12})$ erzeugt werden kann. Eine anschliessende Rotationen ändert daran nichts mehr. Versuche nun in einem zweiten Schritt durch Nachschalten einer Rotation $R_2^z(\phi_2)$ auch für die räumlichen Koordinaten x und y das korrekte Transformationsverhalten zu erreichen. Somit ist

$$\Lambda_2^y\Lambda_1^x = R_2^z\Lambda_{12}^x R_1^z = (R_2^z R_1^z)(R_1^z)^{-1}\Lambda_{12}^x R_1^z.$$

Prüfe ob du im nichtrelativistischen Limes das klassische Ergebnis erhältst.

Aufgabe 2 [*Relativistische Rakete*]: Eine Rakete der Masse m_0 befindet sich zunächst in Ruhe bezgl. eines Inertialsystems. Sie beschleunigt dann geradlinig durch Ausstoss von Masse nach hinten mit konstanter Geschwindigkeit w in ihrem instantanen Ruhesystem. Die Bewegung ist relativistisch zu behandeln.

(i) Zeige, dass eine Veränderung $dm\,(< 0)$ der Masse der Rakete ihr im instantanen Ruhesystem die Geschwindigkeit $dv' = -(w/m)dm$ erteilt.

(ii) Finde die verbliebene Masse m als Funktion der erzielten Geschwindigkeit v im Startsystem. Teste das Resultat anhand des nichtrelativistischen Grenzfalls

$$\frac{m}{m_0} = e^{-v/w}\,.$$

Hinweis: Wie gross ist in (i) der Zuwachs dv im Startsystem?

Aufgabe 3 [*Auto-Paradoxon*]: Ein 4 m langes Auto fährt mit grosser Geschwindigkeit (mit Lorentzfaktor $\gamma = 2$), in eine (sehr stabile) Garage der Länge 3 m. Die Garage habe an ihren beiden Enden Tore, die zunächst geöffnet seien. Für einen Garagenwärter ist das Auto 2 m lang. Er urteilt, dass das Auto zwischenzeitlich mit seiner vollen Länge in die Garage passt. Aus Sicht des Autofahrers ist die Garage nur 1.5 m lang. Folglich urteilt er, dass sein Auto zu keinem Zeitpunkt in die Garage passt.

(i) Erkläre, warum die Sichtweisen der beiden Beobachter kein Paradox darstellen.

(ii) Das Tor am hinteren Ende der Garage sei nun geschlossen. Der Garagenwärter urteilt, dass das Auto, nachdem es vollständig in der Garage verschwunden ist, 1 m Bremsweg hat bevor es an die Wand stösst. Sobald das Auto vollständig innerhalb der Garage verschwunden ist, werde deshalb in der Garage ein Bremsmechanismus ausgelöst, der auf die Vorder- und Hinterräder des Autos gleichermassen einwirkt und das Auto so zum Stehen bringt. Gleichzeitig wird das hintere Garagentor geschlossen. Das Auto befindet sich dann für alle Zukunft vollständig in der Garage. Der Autofahrer ist verwirrt über diesen Umstand, weil nach seinem Urteil das Auto bis zum Bremsmanöver mindestens 2.5 m aus der Garage herausragen muss. Er fürchtet, dass ihm das Garagentor das Heck zerstören könnte. Erkläre, warum seine Furcht unbegründet ist.

(iii) Der Fahrer sollte sich dennoch Sorgen um sein Auto machen, denn offensichtlich wird das Auto beim obigen Bremsmanöver auf mindestens 3 m komprimiert, egal, aus welchem Material es besteht. Wie ist das zu erklären? Wie muss das Auto abgebremst werden, um eine Kompression zu vermeiden?

Hinweise: Die Aussage, dass das Auto in die Garage passt, hat keine absolute Bedeutung, sondern hängt vom Bezugssystem ab. Zeichne deshalb in das x-t-Koordinatensystem des Wärters die Weltlinien des Vorder- und Hinterendes des Autos und der Garage. Wie liegen in diesem Minkowski-Diagramm die $\hat{x}$-$\hat{t}$-Koordinatenachsen des Autofahrers, und wie lautet folglich seine Interpretation der Ereignisse?