Blatt XII

`Abgabe: 13.12.2012`

Aufgabe 1 [*Foucaultscher Kreiselkompass*]: Ein Gyroskop (Kreisel) sei mit seinem Schwerpunkt im Zentrum Cardanischer Ringe befestigt, so dass auf es kein Gravitationsmoment wirkt. [Zusätzlich wird die Figurenachse gezwungen, sich nur in der horizontalen Ebene zu bewegen.] Wir versetzen das Gyroskop auf der Erdoberfläche in schnelle Drehung um seine Figurenachse (d.h. die Hauptachse mit kleinstem Trägheitsmoment), wobei die Drehachse in Richtung des Meridians (d.h. in Richtung auf den Nordpol) gerichtet ist. Wegen der Rotationsbewegung der Erde führt jedoch das Gyroskop eine zusätzliche Drehbewegung aus. Zeige mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen (unter der Annahme das die Kreisfrequenz des Gyroskops gross im Vergleich zur Erddrehung ist), dass die Figurenachse symmetrisch um den Meridian schwingt, und somit als Kompass verwendet werden kann. *[Hinweis: Überlege Dir zunächst, was auf dem Äquator passiert. Dann verallgemeinere Deine Analyse für einen Punkt beliebiger Breite.]*

Aufgabe 2 [*Schwerer symmetrischer Kreisel*]: Wir betrachten einen schweren symmetrischen Kreisel, der eine Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ besitzt, die gross im Vergleich zur mittleren Präzessionsgeschwindigkeit eines schnelle Kreisels ist, aber klein im Vergleich zu $\omega_3 = \dot{\psi}_0$. Wir benützen die Konventionen aus dem Skript, siehe Kapitel 8.4, also bedeutet dies, dass

$$\frac{mgl}{\Theta_3 \omega_3} \ll \dot{\varphi}_0 \ll \omega_3 \ .$$

Weiterhin nehmen wir an, dass zur Zeit $t = 0$, $\dot{\theta} = 0$.

(i) Zeige, dass unter diesen Bedingungen, die Begrenzungskreise für die Figurenachse noch eng beieinander liegen. Bestimme die entsprechenden Umkehrwinkel. (*Hinweis: Folge der gleichen Strategie wie in Kapitel 8.4 der Vorlesung.*)

(ii) Zeige dass $x = u_0 - u = \frac{x_1}{2}(1 - \cos bt)$, wobei aber nun $x_1 = \frac{2\dot{\varphi}_0}{b} \sin^2 \theta_0$.

(iii) Unter Benutzung von

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\dot{\varphi}\, \sin\theta\, \sin\psi + \dot{\theta}\, \cos\psi, \dot{\varphi}\, \sin\theta\, \cos\psi - \dot{\theta}\, \sin\psi, \dot{\varphi}\, \cos\theta + \dot{\psi})$$

bestimme die Winkelgeschwindigkeit in dieser Näherung, und zeige, dass sie mit dem Resultat des freien Kreisels, siehe Gleichung (8.3.11) bzw. (8.3.12) aus dem Skript, übereinstimmt.