Blatt XI

Abgabe: 6.12.2012

Aufgabe 1 [*Hamilton–Jacobi Gleichungen*]: Betrachte ein punktförmiges Geschoss der Masse m im Raum, das unter dem Einfluss eines homogenen Gravitationsfeldes $(0,0,-g)$ steht. Zum Zeitpunkt $t=0$ sei $\boldsymbol{q}(0)=0$, $\dot{\boldsymbol{q}}(0)=\boldsymbol{v}$.

(i) Bestimme die Hamiltonfunktion des Systems, leite daraus die Bewegungsgleichungen ab und löse damit das obige Anfangswertproblem.

(ii) Verwende nun die Hamilton–Jacobi–Methode, um dieses Problem zu lösen.

Hinweise: (ii) Die drei Ortskoordinaten q_i $(i=1,2,3)$ sind separabel, wodurch sich das Problem vereinfachen lässt. Siehe Kapitel 7 im Skript und insbesondere 7.2 über separable Probleme.

Aufgabe 2 [*Eigenschaften des Trägheitstensors*]: Der Trägheitstensor eines starren Körpers bezüglich des Punktes $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ ist definiert als

$$\Theta_{ij}=\int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2\delta_{ij}-(x_i-y_i)(x_j-y_j)] \quad (i,j=1,2,3)\,, \tag{1}$$

wobei $m(\boldsymbol{y})$ die Massenverteilung des Körpers ist, und δ_{ij} das Kronecker-Delta beschreibt.

(i) Sei nun der Trägheitstensor Θ^0_{ij} eines starren Körpers bezüglich des Schwerpunktes $\boldsymbol{x}=0$ bekannt. Zeige den Steinerschen Satz

$$\Theta^a_{ij}=\Theta^0_{ij}+M(\boldsymbol{a}^2\delta_{ij}-a_ia_j) \quad (i,j=1,2,3)\,, \tag{2}$$

wobei Θ^a_{ij} der Trägheitstensor bezüglich des Punktes $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ist und $M=\int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})$ die Gesamtmasse des Körpers bezeichnet.

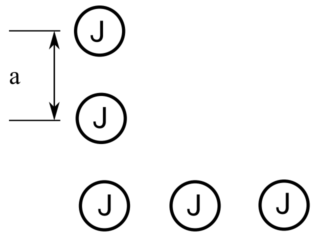
(ii) Zeige, dass die Diagonaleinträge des Trägheitstensors stets der folgenden Gleichung genügen:

$$\Theta_{11}+\Theta_{22}\geq\Theta_{33}\,, \tag{3}$$

und analog bei beliebiger Vertauschung der Indizes. Wann gilt Gleichheit, d.h. $\Theta_{11}+\Theta_{22}=\Theta_{33}$?

Hinweis: (i) Benutze die Definition des Schwerpunktes.

Aufgabe 3 [*Jodmolekül*]:
Das Molekül J_5^-, das aus fünf Jodatomen der Masse m besteht, ist eben. Etwas idealisiert betrachtet, sind die Abstände a zwischen benachbarten Atomen alle gleich, und der Winkel zwischen den beiden Reihen von jeweils drei Atomen beträgt 90 Grad (siehe Skizze).



(i) Berechne die Hauptträgheitsmomente (und die zugehörigen Hauptdrehachsen) bezüglich des Atoms in der unteren linken Ecke.

(ii) Berechne die Hauptträgheitsmomente (und die zugehörigen Hauptdrehachsen) bezüglich des Schwerpunktes.

(iii) Unter der Annahme, dass sich das Molekül um die Achse mit dem grössten Trägheitsmoment dreht, berechne die Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation. [Die Rotationsenergie des Moleküls sei gleich $\frac{1}{2}kT$, wobei $T = 300\text{K}$ und k die Boltzmannkonstante ist. Der Abstand der Atome beträgt $a = 4 \cdot 10^{-10}\text{m}$, die Masse der Atome ist $m = 127 \cdot 1.6610^{-27}\text{kg}$, und die Boltzmannkonstante ist $k = 1.3 \cdot 10^{-23}\text{J/K}$.]

Hinweise: (i) Die Hauptdrehachsen sind dadurch definiert, dass sie eine Basis bilden, bezüglich welcher der Trägheitstensor diagonal ist. Die Diagonalelemente sind die entsprechenden Hauptträgheitsmomente. Wähle die x_1– und x_2–Achsen entlang den Atomreihen und die x_3–Achse senkrecht dazu.
(ii) Benutze den Steinerschen Satz.