Blatt I

`Abgabe: 27.9.2012`

Question 1 [*Galileigruppe*]: Zeige, dass die Galileitransformationen

$$\mathbf{x}' = R\,\mathbf{x} + \mathbf{v}\,t + \mathbf{b}\,, \qquad t' = \pm t + a\,, \tag{1}$$

wobei R ein Element von O(3) ist, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{b}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$ beschreiben und $a \in \mathbb{R}$ ist, eine Gruppe bilden.

Question 2 [*Galileiinvarianz*]: Betrachte ein mechanisches System von N Massenpunkten im $\mathbb{R}^3$, dessen Galilei-invariantes Kraftgesetz von der Form

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} V(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)\;, \qquad i = 1, \ldots, N\;, \tag{2}$$

ist.

(i) Betrachte den Fall zweier ($N = 2$) Massepunkte, die zur Anfangszeit in Ruhe sind. Zeige, dass die Bewegung der beiden Punkte in der Geraden verläuft, die die Anfangslagen enthält.

(ii) Wie sieht die entsprechende Behauptung für drei ($N = 3$) Massepunkte aus?

(iii) Zeige, dass man für zwei Massepunkte (die zu der Anfangszeit nicht notwendigerweise in Ruhe sind) immer ein Inertialsystem finden kann, in dem die Bewegung in einer Ebene verläuft.

Question 3 [*Zeitabhängige Rotationen*]: Sei $R(t)$ eine zeitabhängige orthogonale Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(i) Sei $\mathbf{x}(t) = R(t)\mathbf{y}$, wobei $\mathbf{y}$ ein fester Vektor ist. Zeige, dass $\dot{\mathbf{x}} = \Omega\mathbf{x}$, wobei sich die lineare Abbildung $\Omega : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ als $\Omega\mathbf{x} = \omega \wedge \mathbf{x}$ schreiben lässt. Den Vektor ω nennt man die Winkelgeschwindigkeit.

(ii) Sei Ω (bzw. ω) zeitunabhängig. Berechne $R(t)$ durch Summation der Exponentialreihe

$$R(t) = \exp(\Omega t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Omega t)^n\;. \tag{3}$$