Aufgabe 1.1 Rechenregeln für partielle Ableitungen

Die Variablen x, y, und z seien verknüpft durch $f(x, y, z) = 0$. Gegeben sei eine Funktion $w(x, y)$ von zwei der drei Variablen. Zeige, dass

a) $$\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_z\right)^{-1},$$

b) $$-1 = \frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z \frac{\partial y}{\partial z}\Big|_x \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_y,$$

c) $$\frac{\partial x}{\partial w}\Big|_z = \frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z \frac{\partial y}{\partial w}\Big|_z,$$

d) $$\frac{\partial x}{\partial z}\Big|_w = \frac{\partial x}{\partial y}\Big|_w \frac{\partial y}{\partial z}\Big|_w,$$

e) $$\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_z = \frac{\partial x}{\partial y}\Big|_w + \frac{\partial x}{\partial w}\Big|_y \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_z.$$

Aufgabe 1.2 Zustandsgrössen

Es sei bekannt, dass die "Energie" E unter kleinen Änderungen dx, dy der externen Parameter x, y sich wie

$$\delta E = F_x dx + F_y dy$$

ändert, mit dem Vektor $\mathbf{F}(x, y) = [F_x(x, y), F_y(x, y)]$ ("Kraft"). Man nennt E eine Zustandgrösse, falls δE sich als ein exaktes Differential

$$dE = \partial_x E(x, y)dx + \partial_y E(x, y)dy$$

darstellen lässt.

a) Gegeben δE (bzw. $\mathbf{F}$), zeige die Äquivalenz von folgenden zwei Aussagen:

   i) E ist eine Zustandsgrösse, d.h. $\exists E(x, y) : \mathbf{F} = \nabla E$ und

   ii) $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0$.

b) Warum nennt man E eine Zustandsgrösse?

c) Warum sind Zustandsgrössen in der Thermodynamik von Bedeutung?

d) Wenn ein Differential δE nicht exakt ist, kann man einen integrierenden Faktor $\mu(x, y)$ finden, so dass $dS = \mu(x, y)\delta E$ exakt wird. Bestimme den integrierenden Faktor $\mu(x, y)$ für

$$\delta E = (xy^2 + xye^x)dx + (2x^2y + xe^x)dy$$

unter der Annahme, dass μ nur von x abhängt. Bestimme zudem $S(x, y)$.

e) Gib je ein Beispiel aus der Thermodynamik für exakte Differentiale, nichtexakte Differentiale und deren integrierende Faktoren an.

Aufgabe 1.3 Kalorienverbrauch*

In dieser Aufgabe soll ein einfaches Modell für den Wärmeverlust eines menschlichen Körpers konstruiert werden. Wir betrachten dazu den Energiehaushalt eines Triathleten: Neben der mechanischen Arbeit wird Energie durch Wärmestrahlung und Wärmeleitung an die Umgebung abgegeben.

a) Wie gross ist die Verlustleistung durch Wärme*strahlung* an der frischen Luft, wenn wir eine Oberfläche von ca. $1\,\mathrm{m}^2$ und eine Umgebungstemperatur von 17 Grad Celsius annehmen?

   Hinweis: Die Leistung durch Wärmestrahlung pro Oberfläche A wird durch das Stefan-Boltzmann Gesetz beschrieben (Strahlung eines schwarzen Körpers),

$$dP^{\text{Strahlung}}/dA = \sigma T^4, \tag{1}$$

   wobei die Temperatur T in Kelvin gemessen wird, und die Konstante σ gegeben ist durch $\sigma = \pi^2 k_B^4/60\hbar^3 c^2 = 5.7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W}/(\mathrm{K}^4\,\mathrm{m}^2)$. Zu berechnen ist die *Differenz* zwischen abgestrahlter und absorbierter Strahlung.

b) Wie gross ist im Vergleich dazu der Verlust durch Wärme*leitung*, wenn wir davon ausgehen, dass der Temperaturabfall über eine Distanz von ca. 2 cm erfolgt?

   Hinweis: Die 2 cm sind als Grössenordnung zu verstehen, was wir bei der Interpretation des Resultats berücksichtigen müssen! Für die Verlustleistung durch Wärmeleitung gilt

$$dP^{\text{Leitung}}/dA = \lambda\, dT/dl, \tag{2}$$

   wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des betrachteten Materials angibt ($\lambda^{\text{Luft}} \approx 0.024\,\mathrm{W}/(\mathrm{K\,m})$, $\lambda^{\text{Wasser}} \approx 0.60\,\mathrm{W}/(\mathrm{K\,m})$) und dT/dl den Temperaturgradienten in Richtung des Wärmetransports darstellt.

c) Auf der Schwimmdistanz ist der menschliche Körper permanent mit Wasser (auch 17 Grad) in Berührung. Wie verhält sich der entsprechende Wärmeverlust durch Leitung zum Resultat von b)? (Temperaturabfall wiederum über eine Distanz von ca. 2 cm).

d) Beim Ironman wird im Wasser eine Distanz von 3.86km zurückgelegt – die besten Athleten brauchen dafür eine Dreiviertelstunde. Wieviele Portionen Spaghetti (80g, ca. 240 kcal) muss der Athlet essen um allein den Energieverlust gemäss Resultat von c) auszugleichen?

Bei dieser Aufgabe geht es nicht darum, genaue Zahlenwerte als Lösung zu erhalten, sondern über die Art und Weise zu diskutieren, wie ein konkretes reales (und dadurch kompliziertes) Problem durch ein möglichst einfaches Modell beschrieben werden kann. Dieses erlaubt dann qualitative Abschätzungen machen zu können.

Webseite

http://www.itp.phys.ethz.ch/education/lectures_hs11/tdw

Übungsstunden

Übungsgruppen ETH: **Mittwochs 15.45 - 16.30 Uhr**
Assistenten: Ruben Andrist (andrist@phys.ethz.ch) HIT F11.1
Daniel Müller (danmuell@itp.phys.ethz.ch) HIT F12
Sarah Thaler (thalers@itp.phys.ethz.ch) HIT F31.2
Michael Walter (mwalter@itp.phys.ethz.ch) HPK D24.2
Übungsgruppe Uni: **Donnerstag 9.00 - 11.00 Uhr**
Assistent: Pier Francesco Monni (pfmonni@physik.uzh.ch), Irchel 36-K81

Testat

Für das Testat müssen 80% der Übungsserien sinnvoll bearbeitet und rechtzeitig abgegeben werden. Die Übungen dürfen in Gruppen von maximal drei Stundenten gelöst werden (Gruppen gelten für das ganze Semester, bitte alle Namen auf dem Blatt notieren).