Übung 1. *Zeeman-Aufspaltung*

In Gegenwart eines Magnetfeldes erhält der Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms einen zusätzlichen Term, der gegeben ist durch

$$H_M = \mu_B(\vec{L} + 2\vec{S})\vec{B} = \mu_B(\vec{J} + \vec{S})\vec{B}. \tag{1}$$

Wir wollen die Energieaufspaltung der ursprünglich entarteten Energieniveaus berechnen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass das Magnetfeld in z-Richtung zeigt. Desweiteren nehmen wir an, dass der gesamte Hamiltonoperator diagonal bezüglich des Gesamtdrehimpulses $\vec{J}$ ist, die Eigenfunktionen lassen sich also in der Form $|n\,j\,m\,l\,s\rangle$ schreiben. l sei beliebig aber fest.

(a) Welche Werte von j sind möglich? Liste alle Kets auf, die bei verschiedenem j und gleichem m_j ein nicht verschwindendes Matrixelement für obigen Hamiltonian liefern. Drücke diese Kets mit Hilfe der Clebsch-Gordan Koeffizienten in der Basis $|n\,l\,s\,m_s\,m_l\rangle$ aus.

(b) Berechne die Matrixelemente für H_M. Bestimme anschliessend die Eigenwerte der Matrix und daraus die Energieaufspaltung.

Übung 2. *Chained Bell inequalities*

In dieser Aufgabe werden wir eine Form der Bell'schen Ungleichung kennen lernen, deren Verletzung durch die Quantenmechanik (QM) noch stärker ist, als die Verletzung der in der Vorlesung besprochenen Version. Wir bezeichnen mit X das Resultat der Messung des ersten Spin und mit Y das Resultat einer raumzeitlich getrennten Messung des zweiten Spin eines Singulett-Zustandes. Wie in Aufgabe 8.3 findet die Messung jeweils bezüglich einer um einen Winkel α rotierten Basis statt. Der Index in X_α gibt diesen Winkel an. Betrachte nun die "Bell-Quantity" I_N für $i \in \{0, 2, \ldots, 2N-2\}$ und $j \in \{1, 3, \ldots, 2N-1\}$,

$$I_N := P\Big[X_0 \neq Y_{\frac{2N-1}{2N}\frac{\pi}{2}}\Big] + \sum_{|i-j|=1} P\Big[X_{\frac{i}{2N}\frac{\pi}{2}} = Y_{\frac{j}{2N}\frac{\pi}{2}}\Big]. \tag{2}$$

(a) Wir gehen zunächst von der Existenz verborgener Variablen aus. Dazu wollen wir annehmen, dass jede Messung von X, Y die Realisierung zweier unabhängiger Zufallsvariablen ist, die ausschliesslich Werte ± 1 annehmen können. Zeige, dass dann $I_N \geq 1$ gilt.

Hinweis. Betrachte

$$F_N := 1 - \delta_{X_0 Y_{\frac{2N-1}{2N}\frac{\pi}{2}}} + \sum_{|i-j|=1} \delta_{X_{\frac{i}{2N}\frac{\pi}{2}} Y_{\frac{j}{2N}\frac{\pi}{2}}}, \tag{3}$$

wobei $\delta_{X_\alpha Y_\beta}$ das Kronecker-Delta der Resultate der Messung X_α und Y_β ist. Zeige, dass für jede mögliche Realisierung der verschiedenen Zufallsvariablen $F_N \geq 1$ gilt, und folgere daraus die Behauptung.

(b) Berechne I_N nach den Gesetzen der QM. Wie verhält sich I_N für $N \to \infty$? Benutze dazu das Resultat von Aufgabe 8.3.

(c) Betrachte den Fall $N = 2$. Vergleiche die Verletzung von $I_2 \leq 1$ durch die QM mit der Verletzung der Ungleichung (10.2.11) im Skript.

(d) Bei der Behandlung der Bell'schen Ungleichung im Skript werden Messungen bezüglich gedrehter Raumachsen $\vec{n}$ betrachtet, während wir bis Anhin von abstrakten Rotationen im Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ ausgegangen sind. Wie muss man $\vec{n}$ im Experiment wählen, wenn man einen Spin bezüglich einer im Hilbertraum um den Winkel α gedrehten Basis messen möchte?