Übung 1. *Drehimpulsaddition*

Betrachte den Spin eines Systems aus einem Teilchen mit Spin $s_1 = 1$ und einem Teilchen mit Spin $s_2 = \frac{1}{2}$. Der Spinoperator des Systems sei $\vec{J} = \vec{S}^{(1)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}^{(2)}$. Wir schreiben kurz $\vec{S}^{(1)}$ statt $\vec{S}^{(1)} \otimes \mathbb{1}$. Für Darstellungen der Drehimpulsalgebra $[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k$ benutze (in Einheiten $\hbar = 1$)

$$\vec{S}^2 \left|s,m\right\rangle = s(s+1)\left|s,m\right\rangle, S_3\left|s,m\right\rangle = m\left|s,m\right\rangle, S_\pm \left|s,m\right\rangle = \sqrt{s(s+1)-m(m\pm 1)}\left|s,m\pm 1\right\rangle \tag{1}$$

für $S_\pm = S_1 \pm S_2$.

a) Zeige, dass $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$. Das Tensorprodukt der Darstellungen s_1 und s_2 ist also wieder eine Darstellung der Drehimpuls-Algebra.

b) Im zusammengesetzten System haben wir eine Eigenbasis $\{\left|s_1, m_1\right\rangle \otimes \left|s_2, m_2\right\rangle\}$ zu $(\vec{S}^{(i)})^2$, $S_3^{(i)}$, und eine Eigenbasis $\left|j,m\right\rangle$ zu $\vec{J}^2$, J_3. Schreibe die $\left|j,m\right\rangle$ als Linearkombination der $\left|s_1, m_1\right\rangle \otimes \left|s_2, m_2\right\rangle$.

   Vorgehen: Bestimme den Zustand $\left|j, m^+\right\rangle$ mit der höchsten magnetischen Quantenzahl $m = m^+$. Wende $J_- = J_1 - iJ_2$ wiederholt auf diesen Zustand an, um die anderen Eigenzustände mit demselben Spin j zu finden. Wenn eine Potenz von J_- schliesslich den Zustand vernichtet, suche erneut den Zustand mit der höchsten magnetischen Quantenzahl im Komplement der bis dahin erzeugten Zustände, und verwende J_- erneut.

c) Überprüfe, dass die erhaltenen Clebsch-Gordan-Koeffizienten mit dem Resultat aus der Vorlesung übereinstimmen (Gleichung 9.5.10):

$$D_{l+1/2} : \left\langle l, \frac{1}{2}, m \mp \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \middle| l, \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, m \right\rangle = \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}} \tag{2}$$

   und

$$D_{l-1/2} : \left\langle l, \frac{1}{2}, m \mp \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \middle| l, \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}, m \right\rangle = \mp\sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}} \tag{3}$$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [S_i^{(1)} + S_i^{(2)}, S_j^{(1)} + S_j^{(2)}] \\
&= [S_i^{(1)}, S_j^{(1)}] + [S_i^{(1)}, S_j^{(2)}] + [S_i^{(2)}, S_j^{(1)}] + [S_i^{(2)}, S_j^{(2)}] \\
&= i\epsilon_{ijk} S_k^{(1)} + i\epsilon_{ijk} S_k^{(2)} \\
&= i\epsilon_{ijk} J_k
\end{aligned}$$

.

(b) Da $J_3 \left|1, m_1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, m_2\right\rangle = (m_1 + m_2)\left|1, m_1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, m_2\right\rangle$ ist, sind die Zustände $\left|1, m_1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, m_2\right\rangle$ bereits Eigenzustände von J_3. Der Basis-Zustand mit maximalem Eigenwert ist (bis auf Phase) eindeutig; in unserem Beispiel ist er gegeben durch $m^+ = m_1^+ + m_2^+ = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Er gehört zu der Darstellung mit $j = m^+ = \frac{3}{2}$, d.h.

$$\left| j = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2} \right\rangle = \left|1, 1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle. \tag{4}$$

Wenden wir nun den Absteigeoperator $J_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ an, so finden wir auf der rechten Seite

$$J_- \left|1,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = S_-^{(1)} \left|1,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + S_-^{(2)} \left|1,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

und auf der linken

$$J_- \left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{3}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle .$$

Daher ist

$$\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\left|1,0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|1,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right). \tag{5}$$

Erneute Anwendung von J_- auf der rechten Seite liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}J_- \left|1,0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + J_- \left|1,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}\left(\left|1,-1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|1,0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right) + \sqrt{2}\left|1,0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}\left|1,-1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + 2\left|1,0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right),
\end{aligned}$$

und auf der linken

$$J_- \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 2\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle .$$

Daraus erhalten wir

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|1,-1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{2}\left|1,0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right). \tag{6}$$

Durch erneutes Anwenden von J_- finden wir den Zustand

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \left|1,-1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle . \tag{7}$$

Dieser Zustand ist derjenige mit niedrigstem m-Wert zu $j = \frac{3}{2}$, der analog zu demjenigen mit höchstem m-Wert (4) mit einem der ursprünglichen Tensorprodukt-Zustände zusammenfällt. Damit haben wir alle Basiszustände der $j = \frac{3}{2}$-Darstellung gefunden.
Von der ursprünglichen Tensorprodukt-Basis bleiben wegen (4) und (7) jetzt nur noch Linearkombinationen aus

$$\left|1,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \left|1,0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \tag{8}$$

$$\left|1,0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \left|1,-1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \tag{9}$$

übrig. Dabei haben alle Zustände der ersten Zeile (8) bezüglich J_3 den Eigenwert $m = +\frac{1}{2}$, und die Zustände in der letzten Zeile den Eigenwert $m = -\frac{1}{2}$. Zusammen bilden sie also eine Darstellung der Drehimpulsalgebra mit Spin $j = \frac{1}{2}$. Die Kombination mit $j = \frac{1}{2}$, $m = +\frac{1}{2}$ muss zudem orthogonal auf den Zustand in (5) stehen, da sie bezüglich $\vec{J}^2$ ja einen anderen Eigenwert besitzt:

$$\left\langle \frac{3}{2},\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 0.$$

Setzen wir

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \alpha\left|1,0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \beta\left|1,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

an, so erhalten wir daraus

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta = 0.$$

Zusammen mit der Normierung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ folgt

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \beta = -\frac{2}{3}$$

bzw.

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|1,0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{2}\left|1,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right). \tag{10}$$

Wendet man nun erneut J_- auf (10) an, so findet man

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,|1,-1\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - |1,0\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right). \tag{11}$$

Man stellt leicht fest, dass dieser Zustand wie erforderlich orthogonal zu (6) ist. Die Zustände (10) und (11) bilden die Basis einer $j = \frac{1}{2}$-Darstellung. Bezeichnet D_j die irreduzible Darstellung der Drehimpulsalgebra zum $\vec{J}^2$-Eigenwert $j(j+1)$, so finden wir zusammenfassend also, dass die Darstellung $D_1 \otimes D_{1/2}$ reduzibel ist und in die irreduziblen Anteile $D_{3/2}$ und $D_{1/2}$ zerfällt:

$$D_1 \otimes D_{1/2} = D_{3/2} \oplus D_{1/2}.$$

Die Basis von $D_{3/2}$ ist bezüglich der kanonischen Basis des Tensorprodukts gegeben in (4) - (7), und die Basis von $D_{1/2}$ ist (10), (11).

(c) Mit $l = 1$ stimmen die Koeffizienten mit dem Ergebnis aus der Vorlesung überein.

Übung 2. *Additionen von drei Drehimpulsen*

Im folgenden wollen wir noch die Addition von drei Drehimpulsen behandeln. Man hat also Drehimpulsoperatoren $\vec{J}_1$, $\vec{J}_2$, $\vec{J}_3$ mit den jeweiligen Eigenzuständen $|j_i, m_i\rangle$, $i = 1, 2, 3$. Analog zum Fall der Kopplung von zwei Drehimpulsen suchen wir jetzt Eigenzustände von $\vec{J}^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3)^2$ und $J_z = J_{1z} + J_{2z} + J_{3z}$.

a) Kopple zunaechst J_1 und J_2 zu J_{12} wie gewohnt, und gib einen Ausdruck an für die Clebsch-Gordan Koeffizienten. Die Drehimpulse J_3 lassen wir vorerst unbeteiligt.

b) Dann kopple die beiden neuen 'Drehimpulse' J_{12} und J_3, und gib wieder die resultierenden Clebsch-Gordan Koeffizienten an.

c) Ist die quantenmechanische Drehimpulsaddition assoziativ? *Hinweis:* Betrachte dazu die 'guten Quantenzahlen', die für die Spezifikation der Zustände verwendet werden.

d) Um die Typen von Zuständen, die bei jeweils anderer Reihenfolge der Kopplung entstehen, ineinander umzuformen, benötigt man Koeffizienten der Form $\langle jm(j_1j_2)j_3j_{12}|jmj_1(j_2j_3)j_{23}\rangle$. Wodurch sind diese bestimmt?

e) Stelle einen Zusammenhang her zwischen diesen Überlegungen und den unterschiedlichen Relevanzbereichen von L-S Kopplung und j-j-Kopplung in der Atomphysik. Wie wird dort jeweils approximiert?

Lösung:

(a) Koppelt man zunächst $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ zu $\vec{J}_{12}$ und lässt $\vec{J}_3$ unverändert, so erhält man

$$\begin{aligned}
&|j_{12}m_{12}j_1j_2; j_3m_3\rangle \\
&= \sum_{m_1,m_2,m_1+m_2=m_{12}} |j_1m_1j_2m_2j_3m_3\rangle \langle j_1m_1j_2m_2j_3m_3|j_{12}m_{12}j_1j_2; j_3m_3\rangle \\
&= \sum_{m_1,m_2,m_1+m_2=m_{12}} |j_1m_1j_2m_2j_3m_3\rangle \langle j_1m_1j_2m_2|j_{12}m_{12}j_1j_2\rangle .
\end{aligned}$$

(b) Wenn man nun noch J_{12} und J_3 koppelt, erhält man

$$|jm(j_1j_2)j_3j_{12}\rangle = \sum_{m_{12},m_3,m_{12}+m_3=m} |j_{12}m_{12}j_1j_2; j_3m_3\rangle \langle j_{12}m_{12}j_3m_3|jmj_3j_{12}\rangle \tag{12}$$

$$= \sum_{m_1,m_2,m_3} |j_1m_1j_2m_2j_3m_3\rangle * \sum_{m_{12}} \langle j_1m_1j_2m_2|j_{12}m_{12}j_1j_2\rangle \langle j_{12}m_{12}j_3m_3|jmj_3j_{12}\rangle \tag{13}$$

.

(c) Im Resultat aus (b) tritt j_{12} als 'gute Quantenzahl' auf - die Reihenfolge der Kopplung spiegelt sich also in den erhaltenen Zuständen wider! Hätte man zuerst j_2 und j_3 zu j_{23} gekoppelt, hätte man unterschiedliche Zustände erhalten. Die Addition ist dennoch natürlich assoziativ in dem Sinne, dass die resultierenden Räume isomorph sind - die Basen können ineinander umgerechnet werden. Das ist zu erwarten, denn physikalisch gesehen sollte die Reihenfolge der Addition keine Rolle spielen.

(d) Um die durch verschiedene Vorgehensweisen erhaltenen Zustände ineinander umzurechnen, benötigt man Ausdrücke der Form $\langle jm(j_1j_2)j_3j_{12}|jmj_1(j_2j_3)j_{23}\rangle$ - diese sind durch Summen über Produkte von vier Clebsch-Gordan Koeffizienten bestimmt. Diese 'Umkopplungskoeffizienten' sind (mit kleinen Änderungen) als 'Racah-Koeffizienten' bzw. als 'Wignersche 6j-Symbole' tabelliert worden.

(e) In der Atomphysik ist dieser Punkt folgendermassen bedeutsam: Wenn in einem Mehrelektronen-Atom die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen gegenüber ihrer eigenen Spin-Bahn-Wechselwirkung gross ist, wird die L-S Kopplung zum relevanten Effekt, und demnach koppeln zuerst die Bahndrehimpulse der Elektronen untereinander zu $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ sowie die Spins der Elektronen untereinander zu $\vec{S} = \sum_i \vec{S}_i$, sodass die Gesamtdrehimpulsquantenzahl l und der Gesamtspin s gute Quantenzahlen sind. Die Spin-Bahn Kopplung der einzelnen Elektronen kann dann in einer ersten Approximation vernachlässigt werden. Dies ist besonders in leichten Atomen der Fall.
Wenn dagegen die Spin-Bahn-Kopplung jedes einzelnen Elektrons dominiert, so müssen diese zuerst gekoppelt werden zu $\vec{J}_i = \vec{J}_i\dot{S}_i$ und man erhält als gute Quantenzahlen die einzelnen j_i der Elektronen; die Wechselwirkungen zwischen den Elektronen ist dann in einer ersten Approximation nicht relevant. In diesem Fall spricht man von j-j-Kopplung, die in schwereren Atomen überwiegt.

Übung 3. *Der klassische Grenzfall*

In dieser Übungsaufgabe wollen wir nun die Ergebnisse der Drehimpulsaddition in klassischer Physik und die der Quantenmechanik vergleichen. In der klassischen Physik identifizieren wir den Drehimpuls mit dem Vektor $\vec{J} = \hbar \left\langle \vec{J} \right\rangle$, und der Drehimpuls des zusammengesetzten Systems ergibt sich aus der Vektoraddition der einzelnen Drehimpulse.

a) Gib eine Formel an für den Gesamtdrehimpuls J^2 in der klassischen Physik, und fertige eine Zeichnung zur Drehimpulsaddition an.

b) Nehme im Folgenden an, dass für $\vec{J_1} + \vec{J_2}$ alle Punkte *auf der Kugel* mit Radius J_2 um $\vec{J_1}$ gleich wahrscheinlich sind. Wie ist dann die Wahrscheinlichkeit dP, dass der Winkel Θ zwischen $\vec{J_1}$ und $\vec{J_2}$ im Intervall $(\Theta,\Theta + d\Theta)$ liegt?

c) Indem du die Änderung von J betrachtest, wenn sich Θ um $d\Theta$ ändert, drücke die Wahrscheinlichkeit dP mit Hilfe von J, J_1, J_2 aus.

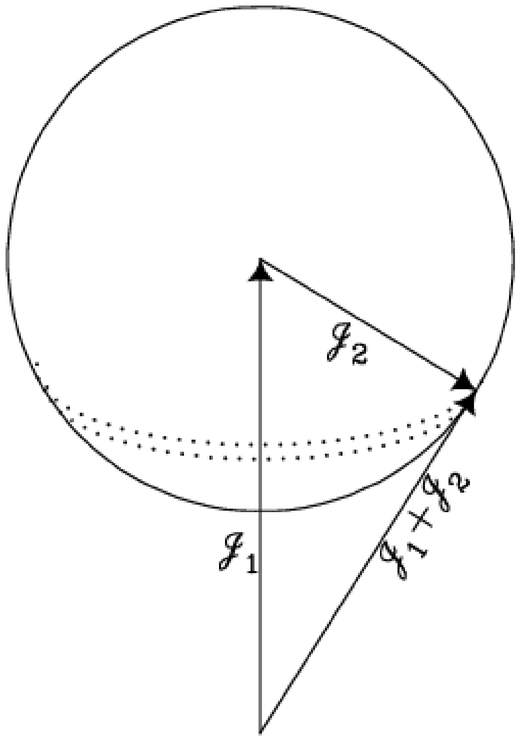
d) Wie lautet die analoge Formel für den Anteil der Zustände mit Drehimpulszahl j in der Quantenmechanik? In welchem Falle entspricht dieser Ausdruck dem klassischen?

Lösung:

(a) Im klassischen Fall werden die Drehimpulse einfach per Vektoraddition zusammengefasst, also $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Es folgt daher

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_1J_2cos\Theta, \tag{14}$$

wobei Θ den Winkel zwischen J_1 und J_2 bezeichnet.



(b) Wenn nun über die Richtung von $\vec{J_2}$ relativ zu $\vec{J_1}$ nichts bekannt ist, sind alle Punkte auf der Kugel um $\vec{J_1}$ mit Radius J_2 gleich wahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit dP, dass Θ zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$ liegt, ist demnach gegeben durch den Raumwinkel:

$$dP = \frac{1}{2} sin\Theta d\Theta, \tag{15}$$

(c) Aus (14) folgt:

$$JdJ = -J_1 J_2 sin\Theta d\Theta, \tag{16}$$

und somit

$$dP = \frac{JdJ}{2J_1 J_2}. \tag{17}$$

(d) In der Quantenmechanik ist der Anteil der Zustände mit Drehimpulszahl j gegeben durch

$$f = \frac{2j+1}{(2j_1+1)(2j_2+1)}. \tag{18}$$

Im klassischen Limit grosser Zahlen, zusammen mit der Annahme, dass alle Zustände gleich wahrscheinlich sind, entspricht diese Zahl der klassischen Wahrscheinlichkeit, dass $J \simeq jh$ zwischen jh und $jh + h$ liegt.