Übung 1. *Drehimpuls und Drehungen*

Sei $SO(3)$ durch die 3×3 reellen Matrizen R mit $R^T R = \mathbb{1}$ und $det(R) = 1$ dargestellt. Ihre Lie-Algebra $so(3)$ ist dann durch die antisymmetrischen reellen 3×3 Matrizen dargestellt:

$$so(3) = \{\Omega(\vec{\omega}) := \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \mid \vec{\omega} := (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3\}\,.$$

$\Omega_i := \Omega(\vec{e_i})$, $\vec{e_i}$, $i = 1, 2, 3$, die gewöhnliche Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, bildet also eine Basis von $so(3)$. Es gilt ferner

(i) $\Omega(\vec{\omega}) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \Omega_i$ und $\Omega(\vec{\omega})\vec{x} = \vec{\omega} \wedge \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$,

(ii) $[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_3$ und zyklisch vertauscht.

Beachte, dass die letzte Bedingung die Lie-Algebra $so(3)$ vollständig charakterisiert.

(a) Zeige, dass $e^{t\Omega(\vec{\omega})} = R(\vec{e}, \omega t)$ gilt, wobei $R(\vec{e}, \omega t)$ die Drehung um $\vec{\omega}$ mit Winkel $t\omega$ ist, $\vec{\omega} = \omega \vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$.

Bemerke ausserdem, dass $\frac{d}{dt} R(\vec{e}, \omega t)|_{t=0} = \Omega(\vec{\omega})$.

Betrachte nun den Drehimpuls $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$ und als Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^3)$. Jede Komponente $L_k = \varepsilon_{klm}\, x_l\, p_m = -i\hbar\, \varepsilon_{klm}\, x_l\, \partial_m$, $k = 1, 2, 3$, ist ein Operator auf $L^2(\mathbb{R}^3)$, wobei $\varepsilon_{123} = 1$ und ε_{klm} total antisymmetrisch ist. Dabei haben wir die Einstein'sche Summationskonvention benutzt, d.h. wir summieren über wiederholte Indizes. Definiere $O_k := -\frac{i}{\hbar} L_k$, $k = 1, 2, 3$.

(b) Zeige die folgenden Aussagen:

(i) $L_k = L_k^\dagger$, d.h. L_k ist selbstadjungiert,

(ii) $[O_1, O_2] = O_3$ und zyklisch vertauscht, d.h. die O_k bilden eine Basis von $so(3)$,

(iii) $e^{\frac{i}{\hbar} t\vec{\omega}\cdot\vec{L}}\, \vec{x}\, e^{-\frac{i}{\hbar} t\vec{\omega}\cdot\vec{L}} = \vec{x} + t\omega(\vec{e} \wedge \vec{x}) + O(t^2)$.

$e^{-\frac{i}{\hbar} t\vec{\omega}\cdot\vec{L}}$ wirkt also auf $L^2(\mathbb{R}^3)$ als Drehung im Sinn dass $\langle \vec{x} \rangle_{\psi'} = \langle \vec{x}\,' \rangle_\psi$ wobei $|\psi'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} t\vec{\omega}\cdot\vec{L}} |\psi\rangle$ der gedrehte Zustand bzw. $\vec{x}\,' = e^{\frac{i}{\hbar} t\vec{\omega}\cdot\vec{L}}\, \vec{x}\, e^{-\frac{i}{\hbar} t\vec{\omega}\cdot\vec{L}}$ der gedrehte Koordinatenvektor sind. Beachte, dass $iO_k =: M_k$ im Skript.

Lösung:

(a) Wegen der Linearität von $\Omega(\cdot)$ gilt: $e^{t\Omega(\vec{\omega})} = e^{\omega t \Omega(\vec{e})}$. Das Exponential eines Operators ist über seine Taylorreihe definiert:

$$e^{\omega t \Omega(\vec{e})} = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega t)^k}{k!} \Omega(\vec{e})^k\,.$$

Angewendet auf $\vec{e}$ dies ergibt:

$$e^{\omega t\Omega(\vec{e})}\vec{e} = \vec{e} + \Omega(\vec{e})\vec{e} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\omega t)^k}{k!}\Omega(\vec{e})^{k-1}\Omega(\vec{e})\vec{e} = \vec{e}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, das $\Omega(\vec{e})\vec{e} = \vec{e} \wedge \vec{e} = 0$. Der Vektor $\vec{e}$ ist also ein Eigenvektor von $e^{\omega t\Omega(\vec{e})}$ zum Eigenwert 1. Wähle nun $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$, so dass $(\vec{e}, \vec{v}, \vec{u})$ eine rechthändige Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist. Dann gilt:

$$\Omega(\vec{e})\vec{v} = \vec{e} \wedge \vec{v} = \vec{u}$$
$$\Omega(\vec{e})^2\vec{v} = \vec{e} \wedge \vec{u} = -\vec{v}$$

und somit

$$\begin{aligned} e^{\omega t\Omega(\vec{e})}\vec{v} &= (\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega t)^k}{k!}\Omega(\vec{e})^k)\vec{v} = \vec{v} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k\vec{u} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\vec{v} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\vec{v} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k\vec{u} = \cos(\omega t)\vec{v} + \sin(\omega t)\vec{u} \end{aligned}$$

was zeigt, dass $e^{\omega t\Omega(\vec{e})}$ eine Drehung um $\vec{\omega} = \omega\vec{e}$ mit Winkel ωt ist.

(b) Die drei Aussagen lassen sich durch einfache Berechnungen zeigen.

(i) Es gilt $(L_k)^\dagger = (\varepsilon_{klm}\, x_l\, p_m)^\dagger = \bar{\varepsilon}_{klm}\, p_m^\dagger\, x_l^\dagger = \varepsilon_{klm}\, x_l\, p_m = L_k$, wobei der vorletzte Schritt aus der Tatsache folgt, dass x_l und p_m selbstadjungiert sind und dass sie vertauschen, sobald $l \neq m$ gilt.

(ii) Nach Definition ist $O_k = -\varepsilon_{klm}\, x_l\, \partial_m$ und somit

$$[O_1, O_2] = [x_3\partial_2 - x_2\partial_3, x_1\partial_3 - x_3\partial_1] = [x_2\partial_3, x_3\partial_1] + [x_3\partial_2, x_1\partial_3] = x_2\partial_1 - x_1\partial_2 = O_3$$

und analog für die anderen Fälle.

(iii) Die Taylorentwicklung ergibt für die i-te Komponente von $\vec{x}$

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}t\vec{\omega}\cdot\vec{L}}\, x_i\, e^{-\frac{i}{\hbar}t\vec{\omega}\cdot\vec{L}} &= (1 + t\omega_k\varepsilon_{klm}x_l\partial_m)x_i(1 - t\omega_k\varepsilon_{klm}x_l\partial_m) + O(t^2) \\ &= x_i + t\omega_k\varepsilon_{klm}x_l\delta_{mi} + O(t^2) = x_i + \omega t(\vec{e} \wedge \vec{x})_i + O(t^2) \end{aligned}$$

für alle $i = 1, 2, 3$, was die Behauptung zeigt.

Übung 2. *Drehungen im Spinraum*

Als nächstes betrachten wir den Spinraum $\mathbb{C}^2$ und die selbstadjungierten unitären Operatoren gegeben durch die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

und definieren $\vec{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Für einen Spin-1/2 Freiheitsgrad bilden sie eine Darstellung des Spinoperators $\vec{S}$, gegeben durch $\vec{S} := \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$. Die Eigenzustände $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$ von S_3 sind dann $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$.

(a) Zeige die folgenden Relationen für die Pauli-Matrizen:

(i) $\sigma_k\, \sigma_l = \delta_{kl}\mathbb{1} + i\varepsilon_{klm}\sigma_m$,

(ii) $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\mathbb{1} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$, für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$,

(iii) $[A_1, A_2] = A_3$ und zyklisch vertauscht, mit $A_k = -\frac{i}{2}\sigma_k$, $k = 1, 2, 3$.

Die A_k, $k = 1, 2, 3$ bilden also auch eine Basis von $so(3)$. Im Folgenden möchten wir andeuten, wie der Operator $V(\vec{\omega}t) := e^{-\frac{i}{2}t\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}} = e^{-\frac{i}{\hbar}t\vec{\omega}\cdot\vec{S}}$ als Drehung im Spinraum zu verstehen ist.

(b) Zeige: $V(\vec{\omega}t) = \cos(\frac{\omega t}{2})\mathbb{1} - i(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})\sin(\frac{\omega t}{2})\,,\quad$ wobei $\vec{\omega} = \omega\vec{e}$, $|\vec{e}| = 1\,.$

(c) Wir betrachten einen Spin-1/2 Freiheitsgrad, der sich im Eigenzustand $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ von S_3 befindet. Desweiteren werde eine Drehung um die $\vec{e_1}$-Achse mit Winkel $\pi/2$ ausgeführt. Was ist der Effekt dieser Drehung auf den Spin?

(d) Wir möchten nun den Effekt einer Drehung im Spinraum auf eine allgemeine Achse $\vec{n}$ betrachten. Zeige:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,' := V(\vec{\omega}t)^\dagger\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\,V(\vec{\omega}t) = \vec{\sigma}\cdot[\vec{e}\,(\vec{e}\cdot\vec{n}) + (\vec{n}-\vec{e}\,(\vec{e}\cdot\vec{n}))\cos(\omega t) + (\vec{n}\wedge\vec{e})\sin(\omega t)]\,.$$

(e) Welchen Effekt hat eine Drehung um $2\pi\vec{e}$ auf einen allgemeinen Zustand $|\,\psi\rangle$?

Lösung:

(a) Wieder sind die drei Aussagen leicht überprüfbar:

(i) Mit $\sigma_k^2 = \mathbb{1}$, $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$ und zyklisch vertauscht folgt die erste Aussage.

(ii) Mithilfe von (i) berechnen wir

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) &= (\sum_{k=1}^3\sigma_k a_k)(\sum_{l=1}^3\sigma_l b_l) = \sum_{k,l=1}^3\sigma_k\sigma_l a_k b_l = \mathbb{1}\sum_{k,l=1}^3(\delta_{kl}a_k b_l + i\sum_{m=1}^3\varepsilon_{klm}\sigma_m a_k b_l)\\ &= \mathbb{1}(\sum_{k=1}^3 a_k b_k + i\sum_{m=1}^3\sigma_m\sum_{k,l=1}^3\varepsilon_{klm}a_k b_l) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\mathbb{1} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})\end{aligned}$$

(iii) Nach Definition haben wir $[A_1, A_2] = -\frac{1}{4}[\sigma_1,\sigma_2]$. Und mit (i) folgt $[\sigma_1,\sigma_2] = 2i\sigma_3$. Die zyklischen Permutationen folgen analog.

(b) Aus der Relation (ii) in Teilaufgabe (a) mit $\vec{a} = \vec{b} = \vec{\omega}$ folgt, dass $(\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma})^2 = \omega^2\mathbb{1}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}e^{-\frac{i}{2}t\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}} &= \sum_{k=0}^\infty\frac{(-it\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}/2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^\infty\frac{(-it\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}/2)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^\infty\frac{(-it\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}/2)^{2k}(-it\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}/2)}{(2k+1)!}\\ &= \mathbb{1}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-it\omega/2)^{2k}}{(2k)!} + (\vec{e}\cdot\vec{\sigma})\sum_{k=0}^\infty\frac{(-it\omega/2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(\frac{\omega t}{2})\mathbb{1} - i(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})\sin(\frac{\omega t}{2})\,.\end{aligned}$$

(c) Unter Verwendung von Teil (b) dieser Aufgabe erhalten wir

$$V(\frac{\pi}{2}\vec{e}_1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

was ein Eigenvektor von σ_2 zum Eigenwert -1 ist, d.h. der Spin befindet sich nach der Drehung im Eigenzustand $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ von S_2.

(d) Mit Teilaufgabe (b) dieser Aufgabe haben wir

$$\begin{aligned}V(\vec{\omega}t)^\dagger\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\,V(\vec{\omega}t) &= (\cos(\frac{-\omega t}{2})\mathbb{1} - i(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})\sin(\frac{-\omega t}{2}))(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})(\cos(\frac{\omega t}{2})\mathbb{1} - i(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})\sin(\frac{\omega t}{2}))\\ &= \cos^2(\frac{\omega t}{2})(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}) + \frac{i}{2}\sin(\omega t)[(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}) - (\vec{\sigma}\cdot\vec{n})(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})] + \sin^2(\frac{\omega t}{2})(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})\\ &= \cos^2(\frac{\omega t}{2})(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}) + \sin(\omega t)(\vec{\sigma}\cdot(\vec{n}\wedge\vec{e})) + \sin^2(\frac{\omega t}{2})[(\vec{\sigma}\cdot\vec{e})(\vec{e}\cdot\vec{n}) + i\underbrace{(\vec{\sigma}\cdot(\vec{e}\wedge\vec{n}))(\vec{\sigma}\cdot\vec{e})}_{\mathbb{1}\underbrace{((\vec{e}\wedge\vec{n})\cdot\vec{e})}_{0} + i\vec{\sigma}\cdot\underbrace{((\vec{e}\wedge\vec{n})\wedge\vec{e})}_{-(\vec{e}\cdot\vec{n})\vec{e}+\vec{n}}}]\\ &= \cos^2(\frac{\omega t}{2})(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}) + \sin(\omega t)(\vec{\sigma}\cdot(\vec{n}\wedge\vec{e})) + \sin^2(\frac{\omega t}{2})[(\vec{\sigma}\cdot\vec{e})(\vec{e}\cdot\vec{n}) - (\vec{\sigma}\cdot\vec{n}) + (\vec{\sigma}\cdot\vec{e})(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})]\\ &= \underbrace{[\cos^2(\frac{\omega t}{2}) - \sin^2(\frac{\omega t}{2})]}_{\cos(\omega t)}(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}) + \sin(\omega t)(\vec{\sigma}\cdot(\vec{n}\wedge\vec{e})) + \underbrace{2\sin^2(\frac{\omega t}{2})}_{1-\cos(\omega t)}(\vec{\sigma}\cdot\vec{e})(\vec{e}\cdot\vec{n})\\ &= \vec{\sigma}\cdot[\vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{n}) + (\vec{n}-\vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{n}))\cos(\omega t) + (\vec{n}\wedge\vec{e})\sin(\omega t)]\end{aligned}$$

wie behauptet. Wenn man $\vec{n}$ wie folgt ausdrückt,

$$\vec{n} = \vec{n}_{\|} + \vec{n}_{\perp} = \vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{n}) + (\vec{n} - \vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{n}))$$

so gilt für einen im 3-dimensionalen Koordinatenraum rotierten Vektor $R(\vec{\omega}t)\vec{n}$, dass

$$R(\vec{\omega}t)\vec{n} = \vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{n}) + \cos(\omega t)(\vec{n} - \vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{n})) + \sin(\omega t)(\vec{n}\wedge\vec{e}) \tag{1}$$

d.h. $\vec{n}\,' = R(\vec{\omega}t)\vec{n}$.

(e) Unter Verwendung der vorigen Teilaufgabe sehen wir, dass

$$V(2\pi\vec{e})^{\dagger}(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})V(2\pi\vec{e}) = \vec{\sigma}\cdot[\vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{n}) + (\vec{n} - \vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{n}))] = \vec{\sigma}\cdot\vec{n}$$

d.h. die Ausrichtung des Spins ist dieselbe wie vor der Drehung um $2\pi\vec{e}$. Hingegen findet man für einen allgemeinen Zustand $|\psi\rangle$, dass

$$V(2\pi\vec{e})|\psi\rangle = (\cos(\pi)\mathbb{1} - i\sin(\pi)(\vec{\sigma}\cdot\vec{e}))|\psi\rangle = -|\psi\rangle$$

d.h. eine Drehung um $2\pi\vec{e}$ führt auf einen "geflippten" Zustand. Erst mit einer Drehung um $4\pi\vec{e}$ erhält man den ursprünglichen Zustand zurück, eine Konsequenz der Halbzahligkeit des Drehimpulses.

Übung 3. *Tensorprodukte und Singulett-Zustand*

(a) Seien V, W und Z drei Hilberträume. Verifiziere, dass

$$(V\otimes W)\otimes Z \cong V\otimes(W\otimes Z)\,,$$

d.h. dass die zwei Seiten der Gleichung isomorph sind. Das Tensorprodukt ist also bis auf Isomorphismus assoziativ.

(b) Es seien V, W zwei 2-dimensionale Hilberträume mit Basen $\{v_1, v_2\}\subset V$ und $\{w_1, w_2\}\subset W$. Zeige, dass kein Paar von Vektoren $v\in V$ und $w\in W$ existiert, so dass

$$v\otimes w = v_1\otimes w_1 + v_2\otimes w_2\,. \tag{2}$$

(c) Ein Beispiel davon ist in einem Spin-1/2 System der antisymmetrische Singulett-Zustand

$$|\psi^-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_1\rangle_A\otimes|\vec{e}_2\rangle_B - |\vec{e}_2\rangle_A\otimes|\vec{e}_1\rangle_B)\,.$$

Wir möchten die Teilsysteme A und B bezüglich einer rotierten Basis $|\alpha\rangle := \cos(\alpha)|\vec{e}_1\rangle + \sin(\alpha)|\vec{e}_2\rangle$, $|\alpha^{\perp}\rangle := -\sin(\alpha)|\vec{e}_1\rangle + \cos(\alpha)|\vec{e}_2\rangle$ messen. Dazu definieren wir noch die Projektionsoperatoren $O^{\alpha}_{A,B} := |\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha^{\perp}\rangle\langle\alpha^{\perp}|$. Zeige nun, dass im Zustand $|\psi^-\rangle$ der Operator $O^{\alpha}_{A}\otimes O^{\beta}_{B}$ den Wert -1 mit folgender Warscheinlichkeit annimmt:

$$Pr[O^{\alpha}_{A}\otimes O^{\beta}_{B} = -1]_{|\psi^-\rangle} = \cos^2(\alpha-\beta)\,.$$

Lösung:

(a) Sind $\{v_i\}$, $\{w_j\}$ und $\{z_k\}$ jeweils vollständige orthonormale Systeme von V, W und Z, so definiert die Abbildung

$$(v_i\otimes w_j)\otimes z_k \mapsto v_i\otimes(w_j\otimes z_k)$$

ein Isopmorphismus, da der Kern der Abbildung nur aus dem Nullvektor besteht, und die VONS per Definition die jeweiligen Räume vollständig aufspannen.

(b) Zwei Vektoren $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V$ und $w = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \in W$ müssten für $v \otimes w = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2$ das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\lambda_1\mu_1 = 1, \quad \lambda_1\mu_2 = 0, \quad \lambda_2\mu_1 = 0, \quad \lambda_2\mu_2 = 0\,.$$

Dieses System hat keine Lösung.

(c) Wähle $|\,\vec{e}_1\rangle_{A,B} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $|\,\vec{e}_1\rangle_{A,B} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Dann ist $|\,\psi^-\rangle$ gegeben durch

$$\begin{aligned}|\,\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_1\rangle_A \otimes |\vec{e}_2\rangle_B - |\vec{e}_2\rangle_A \otimes |\vec{e}_1\rangle_B) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\,,\end{aligned}$$

die gedrehte Basis durch

$$|\,\alpha\rangle = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}\,, \qquad |\,\alpha^\perp\rangle = \begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix}\,,$$

und der Operator $O_A^\alpha \otimes O_B^\beta$ durch

$$\begin{aligned}O_A^\alpha \otimes O_B^\beta &= (|\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha^\perp\rangle\langle\alpha^\perp|) \otimes (|\beta\rangle\langle\beta| - |\beta^\perp\rangle\langle\beta^\perp|)\\ &= |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| - |\alpha^\perp\rangle\langle\alpha^\perp| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| - |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta^\perp\rangle\langle\beta^\perp| + |\alpha^\perp\rangle\langle\alpha^\perp| \otimes |\beta^\perp\rangle\langle\beta^\perp|\\ &=: (+1)P_1 + (-1)P_{-1}\,.\end{aligned}$$

Es ist äquivalent, den Operator $O_A^{\alpha-\beta} \otimes O_B^0$ anstatt $O_A^\alpha \otimes O_B^\beta$ zu betrachten. Der entsprechende Projektor P_{-1}, dessen Warscheinlichkeit wir berechnen möchten, ist also

$$\begin{aligned}P_{-1} &= |(\alpha-\beta)^\perp\rangle\langle(\alpha-\beta)^\perp| \otimes |0\rangle\langle 0| + |\alpha-\beta\rangle\langle\alpha-\beta| \otimes |\,0^\perp\rangle\langle 0^\perp|\\ &= \begin{pmatrix}-\sin(\alpha-\beta)\\ \cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\\ &\quad + \begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha-\beta)\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\sin^2(\alpha-\beta) & 0 & -\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta) & 0 & \cos^2(\alpha-\beta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &\quad + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos^2(\alpha-\beta) & 0 & \cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta) & 0 & \sin^2(\alpha-\beta)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

und somit folgt

$$\begin{aligned}Pr[O_A^\alpha \otimes O_B^\beta = -1]_{|\psi^-\rangle} &= \langle\psi^-\mid P_{-1}\mid\psi^-\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix} P_{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}[\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)\\ 0\\ -\cos^2(\alpha-\beta)\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \cos^2(\alpha-\beta)\\ 0\\ \cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)\end{pmatrix}]\\ &= \cos^2(\alpha-\beta)\,.\end{aligned}$$