Übung 1. ***Geladenes Teilchen im äusseren, homogenen Magnetfeld: Landau-Niveaus.***

Der Hamiltonoperator eines Teilchens mit Masse m und Ladung q in einem äusseren elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ ist gegeben durch (in Ortsdarstellung und Wahl des Gausschen Einheitensystems):

$$H = \frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right]^2 + q\varphi(\mathbf{x},t) \tag{1}$$

mit dem skalaren Potential $\varphi(\mathbf{x},t)$ und dem Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ so dass:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\nabla\varphi(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \tag{2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \tag{3}$$

wobei φ und $\mathbf{A}$ reell sind.

Im Folgenden wollen wir annehmen, dass $\varphi = 0$ gilt und die magnetische Induktion sei zeitunabhängig, räumlich konstant und zeige entlang der x_3-Achse: $\mathbf{B} = (0,0,B)$. Das Vektorpotential $\mathbf{A}$ kann senkrecht zu $\mathbf{B}$ und unabhängig von x_3 gewählt werden, d. h. $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_\perp(x_1,x_2) = (A_1(x_1,x_2), A_2(x_1,x_2), 0)$.

(a) Zeige zunächst, dass dann H aus Gl.(1) die Gestalt

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + H_\perp \quad , \quad H_\perp = \frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\nabla_\perp - \frac{q}{c}\mathbf{A}_\perp(x_1,x_2)\right]^2$$

annimmt. Hier ist $\nabla_\perp = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, 0\right)$.

(b) Zeige, dass $H_\perp$ mittels den Operatoren $\pi_j = \sqrt{\frac{c}{qB}}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{q}{c}A_j(x_1,x_2)\right), j = 1,2$ auf die Form:

$$H_\perp = \frac{1}{2}\frac{qB}{mc}\left[\pi_1^2 + \pi_2^2\right] \tag{4}$$

gebracht werden kann.

(c) Verifiziere nun die Kommutator-Relationen

$$\left[\pi_1, \pi_2\right] = i\hbar \quad , \quad \left[\pi_j, \pi_j\right] = 0 \quad , \quad j = 1,2. \tag{5}$$

An was erinnern Dich diese Relationen?

(d) Da π_1 und π_2 den gleichen Kommutator-Relationen genügen wie der Orts- und Impulsoperator, liegt es nahe wie bei dem in der Vorlesung behandelten eindimensionalen, harmonischen Oszillator die Operatoren

$$a = (2\hbar)^{-1/2}\left[\pi_1 + i\pi_2\right] \quad , \quad a^\dagger = (2\hbar)^{-1/2}\left[\pi_1 - i\pi_2\right] \tag{6}$$

einzuführen.

Beweise mittels Gl. (5), dass a und $a^\dagger$ dieselben Kommutator-Relationen wie für den harmonischen Oszillator erfüllen.

(e) Benutze Gl. (6) um zu zeigen, dass $H_\perp$ aus Gl. (4) identisch dem Hamiltonoperator des eindimensionalen, harmonischen Oszillators:

$$H_\perp = \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \tag{7}$$

mit Frequenz $\omega_0 \equiv \omega_c = \frac{qB}{mc}$ (Zyklotron-Frequenz) ist. Gl. (7) zeigt also, dass ein geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld (für $p_3 = 0$) vollkommen äquivalent zu einem harmonischen Oszillator ist. Was folgt aus Gl. (7) für die Eigenwerte (= Landau-Niveaus) von $H_\perp$?

Übung 2. ***Eigenenergien harmonischer Oszillatoren.***

Wir betrachten Hamiltonoperatoren für (modifizierte) d-dimensionale harmonische Oszillatoren in der Schrödinger-Theorie. Bestimme jeweils die Energieeigenwerte vom:

(a) anisotropen harmonischen Oszillator
$H_a = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{d} \omega_i^2 x_i^2$

(b) geladenen harmonischen Oszillator in einem konstanten äusseren elektrischen Feld der Stärke E entlang der x_1-Achse
$H_b = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{x}^2 - qEx_1$

(c) vom harmonischen Oszillator mit bevorzugter Bewegung entlang der Diagonalen $x_1 = x_2$
$H_c = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha(x_1 - x_2)^2 \qquad (\alpha > 0)$

Hinweis: Führe jeweils eine angemessene Koordinatentransformation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ durch, so dass sich der Hamiltonian ausgedrückt durch die neuen Koordinaten $\mathbf{y}$ als Summe entkoppelter 1-dimensionaler harmonischer Oszillatoren schreiben lässt. Beachte und zeige auch dass eine unitäre Transformation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ die Form des kinetischen Energieoperators nicht ändert, d.h. $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{x}}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{y}}^2$. Gegebenenfalls kann es noch hilfreich sein sich zuerst Gedanken zu machen wie die Eigenfunktionen des entsprechenden d-dimensionalen harmonischen Oszillators aussehen, um dann Rückschlüsse auf sein Spektrum zu ziehen. Wir führen zu diesem Zweck noch $\varphi_n^{(\omega)}(x)$ ein als die Wellenfunktion der n-ten Anregung eines 1-dimensionalen harmonischen Oszillators mit Winkelfrequenz ω und (1-dimensionaler) Ortskoordinate x.

Übung 3. ***Allgemeine Unschärferelation.*** Gegeben seien zwei Observablen, hier beschrieben durch die zwei selbstadjungierten Operatoren A und B. Sei $\delta A := A - \langle A\rangle_\psi$ und δB entsprechend. Die mittlere quadratische Abweichung von A von seinem Mittelwert $\langle A\rangle_\psi$ im Zustand ψ ist $\langle(\delta A)^2\rangle_\psi$ und analog $\langle(\delta B)^2\rangle_\psi$ für B. In der Vorlesung wurde die folgende Unschärferelation (Ungleichung):

$$\left(\langle(\delta A)^2\rangle_\psi\right)^{1/2} \left(\langle(\delta B)^2\rangle_\psi\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2} \left|\langle i[A,B]\rangle_\psi\right| \tag{8}$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$, hergeleitet. Die zentrale Idee hierbei war es einen Operator L gemäss $L := \alpha\delta A + i\delta B$ zu definieren. Die Unschärferelation ergibt sich dann unmittelbar aus der Bedingung $0 \leq \langle L^\dagger L\rangle_\Psi$.

(a) In der Herleitung der Unschärferelation (15) wurde noch verwendet, dass $i[A,B]$ selbstadjungiert ist. Überprüfe dies.

(b) Was folgt aus (15) für $A = X^\alpha$ (α-Komponente des Ortsoperators) und $B = P^\beta$ (β-Komponente des Impulsoperators).

(c) In diesem Teil wollen wir untersuchen unter welchen Bedingungen aus dem Ungleichheitszeichen in Gl. (15) ein Gleichheitszeichen wird. Für welche Wellenfunktionen $\psi(x)$ eines eindimensionalen Systems, die $\langle X \rangle = 0$ und $\langle P \rangle = 0$ erfüllen, gilt diese angesprochene Gleichheit in Gl. (15) für die Orts- Impulsunschärfe $\left(\langle(\delta X)^2\rangle_\psi\right)^{1/2} \left(\langle(\delta P)^2\rangle_\psi\right)^{1/2}$? Da die rechte Seite in (15) in diesem Beispiel (wegen $[x, p] = i\hbar$) unabhängig von Ψ ist geht es also hier um die Frage wann genau das Produkt der Schwankungsquadrate minimal ist.

Hinweis: Das Ungleichheitszeichen wird genau dann zu einem Gleichheitszeichen wenn $\langle L^\dagger L\rangle_\psi = 0$ gilt, was $L\psi(x) = 0$ impliziert. Benutze $L = \alpha x + i\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ (Ortsdarstellung) und löse die Differentialgleichung $L\psi(x) = 0$. Entweder kann man die Lösung raten oder durch Separation der Variablen (x, Ψ) systematisch erhalten.