Quantenmechanik I. Übung 5.

HS 11 *Abgabe:* Di 1. November 2011

1. Energie-Zeit Unschärferelation

In scheinbarer Ähnlichkeit zur Ort-Impuls Unschärferelation, $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$, findet man in der Literatur die Behauptung

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \,. \tag{1}$$

Ihre Deutung ist dadurch erschwert, dass die Zeit t in der Quantenmechanik als Parameter auftritt und nicht als Observable. Hier sind zwei mögliche Deutungen (beide Mandelshtam, Tamm 1945).

a) Der Erwartungswert einer Observablen A ändert sich mit der Rate $\dot{A} := d\langle A\rangle_{\psi_t}/dt$. Die Zeit t (so die Interpretation) ist die, bei der A einen bestimmten Wert über- oder unterschreitet. Da die Messung von A einer Schwankung ΔA unterliegt, ist

$$\Delta t := \frac{\Delta A}{|\dot{A}|} \,.$$

Zeige (1) mit Hilfe der Formel: $\left|d\langle A\rangle_{\psi_t}/dt\right| = \frac{1}{\hbar}\left|\langle [H, A]\rangle_{\psi_t}\right|$.

b) Ein Zustand $|\psi_0\rangle$ entwickelt sich gemäss der Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar \frac{d}{dt} |\psi_t\rangle = H |\psi_t\rangle \,. \tag{2}$$

Seit $t_0 > 0$ eine Zeit, die $|\psi_t\rangle$ mit Sicherheit vom Anfangszustand $|\psi_0\rangle$ unterscheidbar macht:

$$\langle \psi_0 | \psi_{t_0} \rangle = 0 \,.$$

Zeige:

$$\Delta E \cdot t_0 \geq \hbar \cdot \frac{\pi}{2} \,.$$

Hinweise: Schätze $|\dot{f}(t)|$ ab für $f(t) = |\langle \psi_0 | \psi_t \rangle|^2$. Die Rechnung führt auf $\langle \psi_t | [P, H] | \psi_t \rangle$ mit $P = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$; verwende dafür die Unschärferelation (5.3.1). Benutze schliesslich den Vergleich

$$\dot{f}(t) \geq g(f(t)),\ \dot{f}_0(t) = g(f_0(t)),\ f(0) = f_0(0) \quad \Longrightarrow \quad f(t) \geq f_0(t),\ (t \geq 0) \,. \tag{3}$$

c) Umgekehrt hat Deutung (a) ein Gegenstück für Ort und Impuls, z.B. in Dimension 1: Sei $|\psi_x\rangle$ der um x verschobene Zustand $|\psi_0\rangle$ und x_0 so, dass $\langle \psi_0 | \psi_{x_0} \rangle = 0$. Zeige:

$$\Delta p \cdot x_0 \geq \hbar \cdot \frac{\pi}{2} \,.$$

Hinweis: Wähle H passend in Gl. (2).

Lösung:

a) Mit der Definition von $\dot{A}$ ist

$$|\dot{A}| = \frac{1}{\hbar}\left|\langle[H,A]\rangle_{\psi_t}\right| \leq \frac{2}{\hbar}\Delta E \cdot \Delta A \ ,$$

wobei die Unschärferelation (5.3.1) verwendet wurde. Es folgt

$$\Delta E \cdot \Delta t \equiv \Delta E \frac{\Delta A}{|\dot{A}|} \geq \frac{\hbar}{2} \ .$$

b) Für $f(t) = |\langle\psi_0|\psi_t\rangle|^2 = \langle\psi_t|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\psi_t\rangle$ ist

$$\dot{f}(t) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\big(\langle\psi_t|H\psi_0\rangle\langle\psi_0|\psi_t\rangle - \langle\psi_t|\psi_0\rangle\langle\psi_0|H\psi_t\rangle\big) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle\psi_t|(HP - PH)|\psi_t\rangle$$

mit $P = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$. Unter Berücksichtigung von

$$\left\langle(\Delta P)^2\right\rangle_{\psi_t} = \left\langle P^2\right\rangle_{\psi_t} - \langle P\rangle_{\psi_t}^2 = \langle P\rangle_{\psi_t}\left(1 - \langle P\rangle_{\psi_t}\right) \ ,$$

und von $\langle P\rangle_{\psi_t} = f(t)$ liefert (5.3.1)

$$|\dot{f}(t)| \leq \frac{2\Delta E}{\hbar}\sqrt{f(t)(1-f(t))}$$

(ΔE ist unabhängig von t). Insbesondere gilt die Differentialungleichung

$$\dot{f} \geq -\frac{2\Delta E}{\hbar}\sqrt{f(1-f)}$$

mit $f(0) = 1$. Die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung,

$$\dot{f}_0 = -\frac{2\Delta E}{\hbar}\sqrt{f_0(1-f_0)}$$

mit $f_0(0) = 1$ ist $f_0(t) = \cos^2(\Delta E \cdot t/\hbar)$, für $0 \leq t \leq \pi\hbar/(2\Delta E)$. (Verwende

$$\int \frac{df_0}{\sqrt{f_0(1-f_0)}} = -2\arccos\sqrt{f_0} + C \ ,$$

oder setze ein.) Nach dem Vergleichskriterium (3) ist $f(t) \geq \cos^2(\Delta E \cdot t/\hbar)$, woraus die Behauptung folgt.

c) Der um x verschobene Zustand $\psi_x(y) = \psi_0(x - y)$ erfüllt die Differentialgleichung $(d/dx)|\psi_x\rangle = -|\psi_x'\rangle$, also (2) mit $H = p$ und $t = x$.

2. Kohärente Zustände

Für die stationären Zustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators verschwinden die Erwartungswerte von Ort und Impuls. Aus der klassischen Mechanik weiss man, dass Ort und Impuls sich zeitlich periodisch ändern.

Wir wollen nun Quantenzustände suchen, die ein analoges Verhalten zur klassischen Mechanik aufweisen. Man nennt sie kohärente Zustände.

a) Gesucht sind also Zustände, bei denen die Erwartungswerte für Ort und Impuls nicht verschwinden. Diese Bedingung erfüllen z.B. Eigenzustände des Vernichtungsoperators:

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,. \tag{4}$$

Ein solcher Zustand lässt sich nach den stationären Zuständen entwickeln, d.h.

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n(\alpha)\,|n\rangle\,. \tag{5}$$

Bestimme die Koeffizienten $c_n(\alpha)$.

b) Zeige, dass α den Erwartungswert für Position und Impuls kennzeichnet, und dass kohärente Zustände deshalb klassische Dynamik verfolgen:

$$e^{-iHt/\hbar}\,|\alpha\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}}\,|\alpha_t\rangle\,,$$

wobei $\alpha_t = \alpha e^{-i\omega t}$ die klassische Bahn ist, die dem Phasenraumpunkt $\alpha := (x+ip)/\sqrt{2}$ entspringt (die Phase rechts in der Gleichung könnte durch Verschiebung des Energienullpunkts eliminiert werden). Für diesen Aufgabeteil nehmen wir ausserdem an: $p \,\hat{=}\, \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$.

c) Wir definieren nun den Operator

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \tag{6}$$

Zeige, dass es sich um einen unitären Operator handelt und untersuche seine Wirkung auf den Grundzustand der stationaren Zustände $|0\rangle$.

d) Warum gibt es keine Eigenzustände zum Erzeugungsoperator?

Loesung:

a) Benutzung von Gleichung (5) und Anwendung des Absteigeoperators ergibt:

$$a\,|\alpha\rangle = \sum_n c_n(\alpha)\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

Eingesetzt in Gleichung (4) folgt daraus

$$c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n(\alpha)$$

Damit kann man nun alle Koeffizienten $c_n(\alpha)$ durch $c_0(\alpha)$ ausdrücken und es gilt damit

$$c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0(\alpha).$$

Damit sind alle Koeffizienten bis auf $c_0(\alpha)$ festgelegt. Wie fordern dass $c_0(\alpha)$ reell und postiv und der Ket $|\alpha\rangle$ normiert sein soll. Dann erfüllen die $c_n(\alpha)$ die Gleichung

$$\sum_n |c_n(\alpha)|^2 = 1,$$

d.h.

$$|c_0(\alpha)|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2} = 1,$$

also

$$c_0(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}.$$

Der Ket $|\alpha\rangle$ lässt sich also schreiben als

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle . \tag{7}$$

b) Das α die Erwartungswerte für x und p kennzeichnet sieht man folgendermassen:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x\rangle_\alpha + i\langle p\rangle_\alpha) = \langle a\rangle_\alpha = \alpha.$$

Die klassische Dynamik folgt nun aus Gleichung (7) zusammen mit

$$e^{-iHt/\hbar} |n\rangle = e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle = e^{-i\omega\frac{t}{2}} (e^{-i\omega t})^n |n\rangle$$

c)

$$D^\dagger(\alpha) = e^{\alpha^* a - \alpha a^\dagger} \to D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = 1.$$

Mit $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ (gilt für $[A,[A,B]] = 0$) folgt

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}.$$

Desweiteren gilt

$$e^{-\alpha^* a} |0\rangle = [1 - \alpha^* a + \frac{\alpha^{*2}}{2!} a^2 + ...] |0\rangle = |0\rangle .$$

Damit ergibt sich

$$D(\alpha) |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle .$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit Gleichung (7) sieht man, dass $D(\alpha)$ eine unitäre Transformation ist, die aus dem Grundzustand $|0\rangle$ den kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ erzeugt.

d) Für den Erzeugungsoperator würde gelten:

$$a^\dagger |\alpha\rangle = \sum_n c_n(\alpha)\sqrt{n+1} |n+1\rangle = \alpha |a\rangle . \tag{8}$$

Man kann nun genauso wie fur den Vernichtungsoperator eine Rekursionsformel ableiten und erhält $c_{n+1}(\alpha) = c_n(\alpha)\frac{\sqrt{n+1}}{\alpha}$.

Da der niedrigste Ket in Gleichung (8) der Ket $|1\rangle$ ist und sich $|\alpha\rangle$ aber schreiben lasst als $|\alpha\rangle = \sum_n c_n(\alpha)\,|n\rangle$, bedeutet dies, dass der nullte Koeffizient $c_0(\alpha)$ gleich Null sein muss. Aufgrund der Rekursionsbedingung sind damit aber alle Koeffizienten Null.

3. Harmonischer Oszillator in der Impulsdarstellung

Im harmonischen Oszillator weisen Ort und Impuls eine Symmetrie auf, die nicht zuletzt durch die Form des Hamiltonians offensichtlich wird. Wir wollen im Folgenden den harmonischen Oszillator in der Impulsdarstellung betrachten.

a) Schreibe den Vernichtungsoperator a in der Impulsdarstellung und benutze diesen Ausdruck, um eine Differenzialgleichung für die Grundzustands-Wellenfunktion des harmonischen Oszillators $\tilde{\psi}_0(p)$ (in der Impulsdarstellung) aufzustellen.

b) Löse diese und überprüfe, dass der Ausdruck für $\tilde{\psi}_0(p)$ übereinstimmt mit dem Ergebnis der üblichen Fourier-Transformation beim Wechsel von Ortsdarstellung zu Impulsdarstellung, angewandt auf:

$$\psi_0(q) = \frac{(m\omega)^{1/4}}{(\hbar\pi)^{1/4}} e^{-m\omega q^2/(2\hbar)}. \tag{9}$$

Hinweis: Benutze bei der Fourier-Transformation folgende Formel für das Gauss'sche Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(b^2x^2+ax)} = \frac{\sqrt{\pi}}{b} e^{a^2/4b^2}. \tag{10}$$

c) Verifiziere für diesen Grundzustand die Heisenberg'sche Unschärferelation.

Lösung:

a)Laut Vorlesung gilt

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} q + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}} p). \tag{11}$$

In Impulsdarstellung ist ausserdem

$$q = i\hbar \frac{d}{dp},$$

sodass man nun die Differenzialgleichung

$$0 = a\tilde{\psi}_0(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} i\hbar \frac{d}{dp} + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}} p)\tilde{\psi}_0(p) \tag{12}$$

aufstellen kann.

b) Nach $\tilde{\psi}_0(p)$ gelöst ergibt das

$$\tilde{\psi}_0(p) = N e^{-\frac{p^2}{4\sigma^2}}, \tag{13}$$

mit

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} m\hbar\omega$$

und N Normalisierung.

Mit der Fourier-Transformation erhalten wir

$$\tilde{\psi}_0(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-iqp/\hbar} \psi_0(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dq N e^{-m\omega q^2/(2\hbar)} e^{-iqp/\hbar},$$

welches mit dem Hinweis ausgerechnet ergibt:

$$\tilde{\psi}_0(p) = N e^{-p^2/(4\sigma^2)},$$

wieder mit $\sigma^2 = \frac{m\omega\hbar}{2}$, und so mit dem obigen Ergebnis übereinstimmt.

c) Für die Unschärfe erhalten wir

$$\Delta q \Delta p = \sqrt{(\frac{\hbar}{2m\omega} \times \frac{m\omega\hbar}{2})} = \frac{\hbar}{2}. \tag{14}$$