Übung 1. *Tunneleffekt*

Ein Teilchen der Masse m und der Energie E läuft von $x = -\infty$ gegen das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & (|x| \geq a/2) \\ V_0\,, & (|x| < a/2) \end{cases} \qquad (a > 0,\, V_0 > 0)\ .$$

Löse die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung $H\psi = E\psi$ mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} && (x < -a/2)\,, && k = k(E) \\ \psi_{II}(x) &= A_2 e^{lx} + B_2 e^{-lx} && (|x| < a/2)\,, && l = l(E, V_0) \\ \psi_{III}(x) &= A_3 e^{ikx} && (x > a/2)\ . \end{aligned}$$

Verifiziere, dass die Transmissions- ($T = |A_3/A_1|^2$) und Reflexionskoeffizienten ($R = |B_1/A_1|^2$) im Fall $0 < E < V_0$ die Bedingung $R + T = 1$ erfüllen und dass

$$T(E) = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2\!\left(\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}\,a\right)}$$

gilt.

Hinweise: Bei $x = \pm a/2$ sind $\psi(x)$ und $d\psi/dx$ stetig.

Klassisch wäre $T(E) = 0$. Hier ist das aber nicht der Fall: Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Gebiet rechts vom Potential zu finden, ist nicht Null. Es kann also durch das Potential *tunneln*! Was passiert für $\hbar \to 0$?

Übung 2. *Spektral- und Eigenwerte*

Physikalische Observablen werden in der Quantenmechanik als selbstadjungierte Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum von Wellenfunktionen aufgefasst. Das Spektrum $\sigma(A)$ eines selbstadjungierten Operators $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{zu jedem } \epsilon > 0 \text{ existiert ein Zustand } \psi_\epsilon \in \mathcal{H}\ (\|\psi_\epsilon\| = 1), \\ & \quad \text{so dass } \|(A - \lambda)\psi_\epsilon\| \leqslant \epsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ A - \lambda \mathbb{1} \text{ besitzt keine beschränkte Inverse}\} \end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|$ die zum Skalarprodukt von $\mathcal{H}$ gehörige Norm ist.

Eine Messung einer physikalischen Observablen (dargestellt durch den Operator) A hat die Werte $\lambda \in \sigma(A)$ als mögliche Messergebnisse. Ist der Hilbertraum endlich-dimensional, so besteht $\sigma(A)$ aus den Eigenwerten von A. Im unendlich-dimensionalen Fall gilt dies aber im allgemeinen nicht mehr, wie wir mithilfe eines expliziten Beispiels zeigen.

Wir betrachten im Folgenden den unendlich-dimensionalen Hilbertraum

$$l_2 := \left\{ x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}\ :\ \|x\|^2 := \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

der quadratsummierbaren Folgen mit dem Skalarprodukt

$$\langle x|y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i \qquad \text{für } x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty},\ y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2$$

und den Operator, der durch die einseitige Verschiebung definiert ist

$$S \ : \ l_2 \longrightarrow l_2 \ , \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \ .$$

(a) Zeige, dass S keinen Eigenwert besitzt.

Obwohl S keinen Eigenwert besitzt, ist sein Spektrum nicht leer. Tatsächlich besteht es aus der abgeschlossenen Einheitsscheibe in $\mathbb{C}$. Um dies zu zeigen, benötigen wir einige allgemeine Vorbereitungen. Für die Teilaufgaben (b) bis (d) sei A ein beschränkter Operator auf einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$.

(b) Zeige, dass Spektralwerte vom Betrag her nicht grösser als die Norm ihres Operators sein können:

$$\lambda \in \mathbb{C} \ : \quad |\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \notin \sigma(A) \quad \text{wobei} \quad \|A\| := \sup_{0 \neq x \in \mathcal{H}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ .$$

Hinweis: Benutze, dass für $|\lambda| > \|A\|$ der folgende Satz (von Neumann) gilt:

$$(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\lambda} \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^k \right) \tag{1}$$

wobei die Konvergenz bezüglich der Operatornorm verstanden werden muss.

(c) Zeige, dass $\sigma(A)$ abgeschlossen ist. *Hinweis*: Zeige und benutze die Stetigkeit von $f(\lambda) := \lambda \mathbb{1} - A$ bzw. dass die Menge aller invertierbaren Operatoren offen ist.

(d) Nehme an, es existiere einen zu A adjungierten Operator $A^\dagger$, d.h. $\langle A^\dagger x|y\rangle = \langle x|Ay\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Zeige, dass dann das Spektrum von $A^\dagger$ aus den komplex konjugierten Spektralwerten von A besteht:

$$\sigma(A^\dagger) = \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} \ : \ \lambda \in \sigma(A)\} \ .$$

Nun kehren wir zu unserem Beispiel zurück und zeigen:

(e) $S^\dagger \ : \ l_2 \longrightarrow l_2$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$ ist die zu S adjungierte Abbildung. Ferner haben wir, dass

$$|\lambda| < 1 \Rightarrow \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } S^\dagger.$$

Hinweis: Konstruiere einen expliziten Eigenvektor zu einem Eigenwert λ.

(f) Mit Hilfe der Resultate (b) bis (e) folgt, dass

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ |\lambda| \leqslant 1\}.$$