Übung 1. ***Reeller Energieerwartungswert.*** Zeige Gleichung (2.4.5) aus dem Vorlesungsskript,

$$\langle H\rangle = \langle H\rangle^* \qquad , \tag{1}$$

wobei $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$.

Übung 2. ***Untere Schranke für Energie-Eigenwerte.***

Beweise für ein Teilchen in einem nach unten beschränkten dreidimensionalen Potential $V(\mathbf{x})$, d. h. $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} V(\mathbf{x}) = V_0 > -\infty$, dass für den tiefsten Eigenwert (Grundzustands-Eigenwert) E_1 von $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x})$ gilt:

$$E_1 \geq V_0$$

Hinweis: Berechne $\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x\, \psi_1(\mathbf{x})^*\,(H\psi_1)(\mathbf{x})$ für die Grundzustands-Eigenfunktion $\psi_1(\mathbf{x})$ und führe an geeigneter Stelle eine partielle Integration durch, wobei $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \psi_1(\mathbf{x}) = 0$ zu beachten ist.

Übung 3. ***Zeitableitungen von Erwartungswerten.***

Betrachte ein Teilchen der Masse m in einer Dimension, das einem äusseren Potential $V(x)$ ausgesetzt ist. Der Hamiltonian für dieses quantenmechanische System ist also $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$.

(a) Zeige

$$\frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\langle V'(x)\rangle$$

wobei $V'(x)$ die Ortsableitung von $V(x)$ ist. Verwende dieses Resultat anschliessend um Gleichung (2.3.7) aus dem Vorlesungsskript,

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle = -\frac{1}{m}\langle V'(x)\rangle \tag{2}$$

zu verifizieren.

(b) Nun wollen wir verstehen inwiefern Gleichung (2) sich zur Newtonschen Bewegungsgleichung für die "klassische Position" $\langle x\rangle$ umformen lässt. Dies ist genau dann der Fall wenn $\langle V'(x)\rangle = V'(\langle x\rangle)$ gilt. Nehme im Folgenden ein homogenes Potential $V(x) = V_0\, x^n$ an mit $V_0 > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Für welche n gilt

$$\langle V'(x)\rangle = V'(\langle x\rangle) \qquad ? \tag{3}$$

(c) Welche Gleichung erfüllt der Erwartungswert $\langle x\rangle$ für $n = 2$ und $V_0 = \frac{1}{2}m\omega^2$? Löse diese für die Anfangsbedingungen $\langle x\rangle(t=0) = 0$ und $\left(\frac{d}{dt}\langle x\rangle\right)(t=0) = v_0$.

Übung 4. ***Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld.***

Wir betrachten die Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m und Ladung q in drei Dimensionen unter dem Einfluss eines äusseren, im Allgemeinen zeitabhängigen, elektromagnetischen Feldes, welches in der üblichen Weise durch die Potentiale $\phi(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ beschrieben wird. Hierbei bezeichnen fett markierte Symbole Vektoren, insbesondere $\mathbf{x}$ die Position des Teilchens. Der zeitabhängige Hamiltonian für das Teilchen ist dann gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}(p - q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2 + q\phi(\mathbf{x}, t) \qquad . \tag{4}$$

Sei im Folgenden Λ eine beliebige aber fest gewählte Eichtransformation, die die Potentiale gemäss

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \tag{5}$$

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \tag{6}$$

transformiert. Wir wissen bereits, dass sich dadurch das entsprechende elektromagnetische Feld nicht ändert. Im Folgenden möchten wir untersuchen wie sich die Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{x}, t)$ des Teilchens unter dieser Eichtransformation verändert, wobei wir die Forminvarianz der Schrödinger Gleichung unter Eichtransformationen annehmen wollen, d.h. es gilt auch für die umgeeichte Wellenfunktion Ψ', $i\hbar\partial_t \Psi' = H'\Psi'$, wo H' durch (4) gegeben ist (mit den Potentialen $\phi', \mathbf{A}'$). Zusätzlich fordern wir noch, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$ unverändert bleibt, d.h. wir nehmen an $\Psi'(\mathbf{x}, t) = e^{i\,\chi(\mathbf{x}, t)}\Psi(\mathbf{x}, t)$, mit einer reellwertigen Funktion $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$. Leite eine inhomogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für χ her und überprüfe, dass $\chi = \frac{q}{\hbar}\Lambda + const$ eine Lösung ist.