Thermodynamik
Serie 12

Aufgabe 12.1 Schall

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Dispersionsrelation einer Schallwelle in einem idealen Fluidum linear ist, $\omega = c|\boldsymbol{q}|$, wobei die Schallgeschwindigkeit c zu bestimmen und zu interpretieren ist.

Starte dazu mit den Euler-Gleichungen (Skript S.124) ohne äussere Kräfte ($\boldsymbol{F} = 0$) und mit $k_B = 1$,

$$\partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\,\boldsymbol{u}) = 0,$$

$$D_t\,\boldsymbol{u} + \frac{1}{m\rho}\boldsymbol{\nabla}(\rho T) = 0,$$

$$\frac{3}{2}\,D_t\,T + T\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0,$$

wobei $\rho = mn$ die Massendichte des Fluidums darstellt. Die substantielle Ableitung ist definiert als $D_t \equiv \partial_t + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})$.

a) Entwickle obige Gleichungen in 1. Ordnung um das statische Gleichgewicht ($\boldsymbol{u}_0 = 0$),

$$T = T_0 + T', \qquad \rho = \rho_0 + \rho', \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}',$$

für kleine Abweichungen T', ρ' und $\boldsymbol{u}'$, wobei T_0 und ρ_0 konstant sind. Anschliessend an eine Fouriertransformation lässt sich das resultierende Gleichungssystem nach $T'(\boldsymbol{q},\omega)$, $\rho'(\boldsymbol{q},\omega)$ und $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{q},\omega)$ auflösen.

b) Zeige nun, dass in einem idealen Fluidum kein transversaler Schall propagieren kann, während die longitudinale Dispersionsrelation des Fluidums linear ist. Finde die Schallgeschwindigkeit und interpretiere sie physikalisch. Zum Schluss, nutze aus, dass die Schallpropagation adiabatisch verläuft um die Relation

$$c^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S = \frac{1}{\rho\kappa_S}$$

herzuleiten, wobei κ_S die adiabatische Kompressibilität des Fluidums darstellt.

Aufgabe 12.2 Verbesserte barometrische Höhenformel

Wir berechnen die barometrische Höhenformel unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Temperatur in der Atmosphäre von der Höhe abhängt. Wir beschreiben die Atmosphäre als ideales Gas und vernachlässigen Wärmeaustausch zwischen den einzelnen Gasteilchen (keine Dissipation), weshalb alle Zustandsänderungen adiabatisch ablaufen und durch die Adiabatengleichung des idealen Gases,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

mit $\gamma = c_p/c_v$, beschrieben sind. Die Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht lautet

$$\frac{\boldsymbol{F}}{m} = \frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho}$$

mit der Gravitationskraft $\boldsymbol{F}$, dem Druck p und der Massendichte ρ.

Drücke beide Seiten durch Gradienten von Potentialen aus und verwende die Randbedingungen $p(0) = p_0$, $\rho(0) = \rho_0$ und $T(0) = T_0$, wobei $z = 0$ die Erdoberfläche ist.

Berechne anschliessend Druck, Dichte und Temperatur als Funktion der Höhe z.

Aufgabe 12.3 Reynolds Zahl

Betrachte einen Körper mit typischer Ausdehnung l, welcher sich mit einer Geschwindigkeit u in einem ruhenden viskosen Fluidum bewegt. Letzteres wird durch die Massendichte ρ und den dynamischen Viskositätskoeffizienten η charakterisiert.

a) Zeige, dass die stationäre Navier-Stokes Gleichung

$$(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \boldsymbol{v}$$

in einer dimensionslosen Form geschrieben werden kann, welche nur noch von der Reynolds'schen Zahl $\mathrm{Re} = ul\rho/\eta$ charakterisiert wird.

Hinweis: Alle vorkommenden Grössen setzen sich aus dimensionslosen Funktionen und den Parametern l, u, ρ und η zusammen.

Aus dieser Form ergibt sich, dass das Strömungsverhalten um geometrisch ähnliche Körper bei gleicher Reynoldszahl identisch ist. Im Prinzip gibt die Reynoldszahl Re ein Verhältnis zwischen dem nichtlinearen Term erster Ordnung $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}$ und dem Differentialterm zweiter Ordnung $\Delta \boldsymbol{v}$ an. Ist $\mathrm{Re} \ll 1$, so ist der nichtlineare Term, welcher für Turbulenzen verantwortlich ist, vernachlässigbar und die Strömung ist laminar. Im Gegensatz dazu, wird für $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{crit}} \approx 1$ der Strömugstyp turbulent. Oft wird zur Berechnung der Reynoldszahl die kinematische Zähigkeit $\nu = \eta/\rho$ als charakteristische Grösse des Mediums angegeben.

$$\nu_{\mathrm{Wasser}} = 10^{-6}\ [m^2/s] \qquad \nu_{\mathrm{Luft}} = 1.5 \times 10^{-5}\ [m^2/s] \qquad \nu_{\mathrm{Honig}} \approx 7 \times 10^{-3}\ [m^2/s]$$

b) Schätze die Reynoldszahl

eines fliegenden Insekts,

eines schwimmenden Menschen,

eines Motorfahrzeugs auf der Strasse,

eines herumschwirrenden Staubkorns

und eines in Honig eintauchenden Löffels

ab und bestimme den Strömungstyp (laminar, turbulent) für jeden dieser Fälle.

Sprechstunde: Montag, 13. Dezember 2010, 13:30 - 14:30 Uhr
Roland Willa (HIT K 23.3)