Thermodynamik
Serie 5

Aufgabe 5.1 Die thermodynamischen Potentiale des idealen Gases

Berechne die Energie $u(s,v)$, die freie Energie $f(T,v)$ und die Gibbs'sche freie Energie $g(T,p)$ für ein Mol des idealen Gases.

Hinweis: Nutze als Ausgangspunkt die molare Entropie $s(u,v)$, gegeben durch

$$s - s_0 = c_v \log \frac{u}{u_0} + R \log \frac{v}{v_0} \ ,$$

wobei s_0 die Entropie im Referenzzustand (u_0, v_0) ist. Nutze die Definition der freien Energie und der Gibbs'schen freien Energie aus der Vorlesung und drücke s bzw. v durch die entsprechenden konjugierten Variablen aus.

Aufgabe 5.2 Legendre Transformation

Die Legendre Transformation der Funktion $f(x)$ ist definiert durch

$$f^*(p) := \mathcal{L}f(p) = \sup_x [xp - f(x)].$$

In dieser Aufgabe werden wir zeigen, dass die Legendre Transformation für konvexe Funktionen involutiv ist, d.h. $f^{**} := (f^*)^* = f$. Die Funktion f ist konvex, falls sie folgende Ungleichung erfüllt,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \quad \forall \lambda \in [0,1] \ .$$

a) Wie kann man die Legendre Transformation geometrisch verstehen? Wie lässt sich die ursprüngliche Funktion $f(x)$ aus der Legendre Transformierten $f^*(p)$ geometrisch rekonstruieren?

b) Zeige, dass $f^*(p)$ konvex ist. Betrachte dazu $f^*(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2)$.

c) Falls $f(x)$ stetig differenzierbar und strikt konvex, zeige, dass

$$f^*(p) = \tilde{x}p - f(\tilde{x}),$$

wobei $\tilde{x}$ über die Gleichung $p = f'(\tilde{x})$ festgelegt wird. Die Legendre Transformation wechselt von x zu p als unabhängige Variabel.

d) Falls $f(x)$ stetig differenzierbar und strikt konvex, zeige, dass

$$f^{**}(x) = f(x).$$

Wende dazu die Legendre Transformation auf $f^*(p)$ an.

e) Berechne $f^*(p)$ und $f^{**}(x)$ für $f(x) = c\exp(x)$ und vergleiche das Resultat mit der naiven Transformation $g(p) = f(x)$ mit $p = f'(x)$. Wie sieht die Rücktransformation der allgemeinen naiven Transformation aus und warum ist sie nicht eindeutig?

f) Berechne die Legendre Transformierte $f^*(p)$ der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2/2 & x \leq 1 \\ x - 1/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 7/2 & 2 \leq x \end{cases} .$$

g) Berechne die Legendre Transformierte $f^*(p)$ der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2/2 & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 5/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 7/2 & 2 \leq x \end{cases} ,$$

die nicht konvex ist. Wie sieht die rücktransformierte Funktion $f^{**}(x)$ aus?

In der Thermodynamik ist die Legendre Transformation $\mathcal{L}$ bei der Behandlung von Potentialen wichtig. Sie erlaubt es, von Potentialen $U(S, V)$ zu weiteren Potentialen $F(T, V)$, $G(T, p), \ldots$ überzugehen. Die Transformation tritt auch in der klassischen Mechanik beim Übergang vom Lagrange- zum Hamiltonformalismus auf. In der Elektrodynamik wird sie verwendet, wenn man bei Kapazitätsnetzwerken von der Ladung Q auf das elektrische Potential U wechselt.

Sprechstunde: Montag, 25.10.2010, 13.30 - 14.30 Uhr
Ruben Andrist (HIT K 32.4)