Aufgabe 1.1 Rechenregeln für partielle Ableitungen

Die Variablen x, y, und z seien verknüpft durch $f(x,y,z)=0$. Gegeben sei eine Funktion $w(x,y)$ von zwei der drei Variablen. Zeige, dass

a) $$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_z\right)^{-1},$$

b) $$-1 = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_x \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y,$$

c) $$\left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial w}\right|_z,$$

d) $$\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_w = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_w,$$

e) $$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w + \left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_z.$$

Aufgabe 1.2 Zustandsgrössen

Es sei bekannt, dass die "Energie" E unter kleinen Änderungen dx, dy der externen Parameter x, y sich wie

$$\delta E = F_x dx + F_y dy$$

ändert, mit dem Vektor $\mathbf{F}(x,y) = [F_x(x,y), F_y(x,y)]$ ("Kraft"). Man nennt E eine Zustandgrösse, falls δE sich als ein exaktes Differential

$$dE = \partial_x E(x,y)dx + \partial_y E(x,y)dy$$

darstellen lässt.

a) Gegeben δE (bzw. $\mathbf{F}$), zeige die Äquivalenz von folgenden zwei Aussagen:

   i) E ist eine Zustandsgrösse, d.h. $\exists E(x,y) : \mathbf{F} = \nabla E$ und

   ii) $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0$.

b) Warum nennt man E eine Zustandsgrösse?

c) Warum sind Zustandsgrössen in der Thermodynamik von Bedeutung?

d) Wenn ein Differential δE nicht exakt ist, kann man einen integrierenden Faktor $\mu(x,y)$ finden, so dass $dS = \mu(x,y)\delta E$ exakt wird. Bestimme den integrierenden Faktor $\mu(x,y)$ für

$$\delta E = (xy^2 + xye^x)dx + (2x^2y + xe^x)dy$$

unter der Annahme, dass μ nur von x abhängt. Bestimme zudem $S(x,y)$.

e) Gib je ein Beispiel aus der Thermodynamik für exakte Differentiale, nichtexakte Differentiale und deren integrierende Faktoren an.

Aufgabe 1.3 Kalorienverbrauch*

In dieser Aufgabe soll ein einfaches Modell für den Wärmeverlust eines menschlichen Körpers konstruiert werden. Dazu nehmen wir an, dass Wärmestrahlung und Wärmeleitung die relevanten Mechanismen des Wärmeverlusts sind. Die Verlustleistung pro Oberfläche A durch Wärmestrahlung wird durch das Stefan-Boltzmann Gesetz beschrieben,

$$dP^{\text{Strahlung}}/dA = \sigma T^4, \tag{1}$$

wobei die Temperatur T in Kelvin gemessen wird, und $\sigma = \pi^2 k_B^4/60\hbar^3 c^2 = 5.7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}$. Für die Verlustleistung durch Wärmeleitung gilt die Beziehung

$$dP^{\text{Leitung}}/dA = \lambda\, dT/dl, \tag{2}$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des betrachteten Materials angibt ($\lambda^{\text{Luft}} \approx 0.024\,\mathrm{W/m\,K}$, $\lambda^{\text{Wasser}} \approx 0.60\,\mathrm{W/m\,K}$) und dT/dl den Temperaturgradienten in Richtung des Wärmetransports darstellt.

a) Als einfachstes Modell nehmen wir an, dass der menschliche Körper mit einer Oberfläche von ca. $1\,\mathrm{m}^2$ nur durch Strahlung Wärme verliert. Der Körper habe dabei eine homogene Temperatur von 37 Grad Celsius und die Umgebungstemperatur liege bei 17 Grad. Berechne den Wärmeverlust durch Wärmestrahlung.

b) Nun erweitern wir das Modell um eine isolierende Luftschicht (ca. 20 mm dick), über die mittels Wärmetransport Wärme abgeführt wird. Welcher Prozess bildet den dominanten Beitrag zum Wärmeverlust?

c) Wir können aus unserer Alltagserfahrung sagen, dass wir bei 17 Grad Umgebungstemperatur nicht gerne unbekleidet herumlaufen. Wir beziehen daher noch eine 2 cm dicke Jacke in unsere Überlegungen mit ein, welche die Temperatur an der Grenze zur Umgebung auf 18 Grad senkt. Warum hilft eine Jacke merklich, unsere Wärmeverluste zu vermindern?

d) Versuche nun zu erklären, warum ein menschlicher Körper beim Baden im 17 Grad warmen Wasser schneller auskühlt als an der Luft. Nimm dazu an, dass auch im Wasser eine 2 cm dicke Isolationsschicht gebildet wird. Was ändert sich qualitativ, wenn man einen Neoprenanzug verwendet?

Bei dieser Aufgabe geht es nicht darum, genaue Zahlenwerte als Lösung zu erhalten, sondern über die Art und Weise zu diskutieren, wie ein konkretes reales (und dadurch kompliziertes) Problem durch ein möglichst einfaches Modell beschrieben werden kann. Dieses erlaubt dann qualitative Abschätzungen machen zu können.

Webseite

http://www.itp.phys.ethz.ch/education/lectures_hs10/tdw

Übungsstunden

Übungsgruppen ETH: **Mittwochs 15.45 - 16.30 Uhr**
Assistenten: Ruben Andrist (andrist@phys.ethz.ch) HPK D 24.2
Jonathan Buhmann (buhmann@itp.phys.ethz.ch) HIT F11.1
David Oehri (doehri@itp.phys.ethz.ch) HIT F31.2
Barbara Theiler (btheiler@itp.phys.ethz.ch) HIL F10.3
Roland Willa (willar@itp.phys.ethz.ch) HIT F12

Übungsgruppe Uni: **Montags 9.00 - 9.45 Uhr**
Assistentin: Lea Giordano (giordano@physik.uzh.ch) Y36 K81, Irchel

Testat

Für das Testat müssen 80% der Übungen sinnvoll bearbeitet und rechtzeitig abgegeben werden. Die Übungen dürfen in Gruppen von maximal drei Stundenten gelöst werden (Gruppen gelten für das ganze Semester, bitte alle Namen auf dem Blatt notieren).